

# 「高校生向け数学オリンピック」

難問を解いて、豊橋技術科学大学オープンキャンパスに持ってきてくれた人に、解答とステキなグッズをお渡しします。

場所は当日パンフレットを参照してください。

- (1) 下記のフィボナッチ数列  $\{a_n\}$  において  $a_1=1, a_2=1$  であるとき、一般項  $a_n$  を求めよ。

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$\{a_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

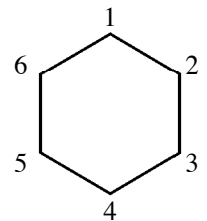
- (2) 上記の(1)を参考にして以下の数列の一般項を求めよ。

$$\{a_n\} : 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

- (3) 一片の長さが1である正六角形の頂点に順番に1から6までの数字を付ける。

いま目の出方が均一であるサイコロが1つある。このサイコロを3回振って出た目の数字の点を頂点とする三角形を考えると、この三角形の面積の期待値を求めよ。

ただし、サイコロによって選ばれた点が重なっていても構わないとする。



- (4)  $xy$  平面上に  $A_1$  から  $A_n$  までの  $n$  個の点がある。

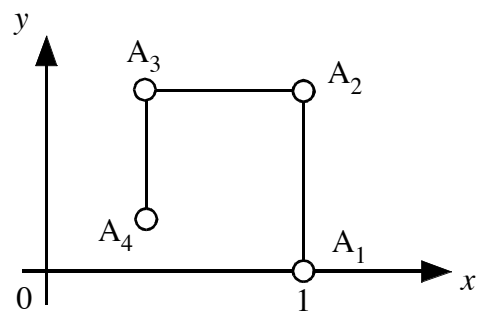
$A_1$  は  $(1, 0)$  とし、 $A_2$  は  $(1, a)$  とする。

以下、線分  $A_{k+1}A_k$  は線分  $A_kA_{k-1}$  の  $a$  倍の長さとなるように、反時計回り方向に各点を順次配置する。

(右図を参照)

この時、 $n \rightarrow \infty$  とした際の  $A_\infty$  の座標を求めよ。

ただし  $0 < a < 1$  とする。



- (5) 平方根のついた複素数は、平方根を外して  $a + ib$  ( $a, b$  は実数) と書き直すことができる。

例：
$$\sqrt{-5+12i} = 2+3i$$

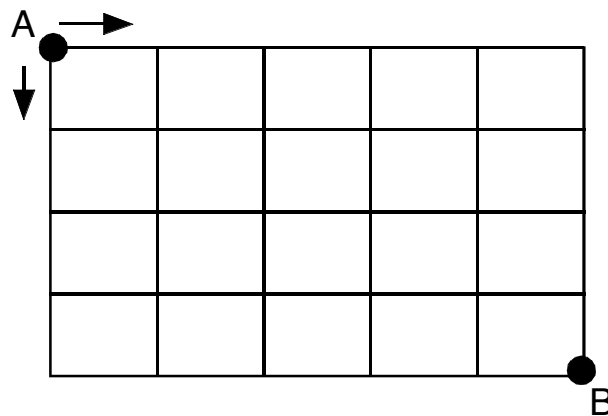
この性質を利用して次の複素数を  $a + ib$  の形へ書き直せ。

(5-1) 
$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$

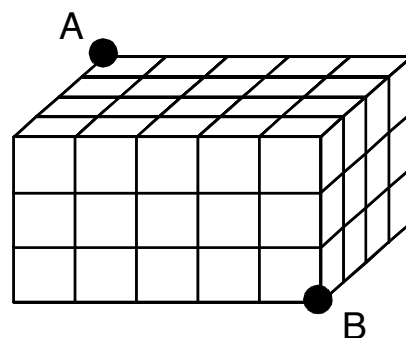
(5-2) 
$$\sqrt{i}$$

1問でも解けたら持ってきてね。

(6) 右図のような格子が平面上にある。  
 格子の左上の点を A、右下の点を B とするとき  
 点 A から点 B まで格子上の線分に沿って最短距離  
 で移動する行き方は何通りあるか？



(7) 右図のような60個の立方体を隙間無く積み上げて  
 作った直方体がある。  
 直方体上の点 A から同じく直方体上の点 B まで最短  
 距離で移動する行き方は何通りあるか？  
 ただし、移動できるのは各立方体上の辺のみであり、  
 また直方体内部に隠れた辺上の移動も可能であるとす  
 る。



(8)  $xy$  平面上に右図のように半径1の円と半径2の円がある。  
 半径1の円は点  $(1, 2)$  を中心とし、半径2の円は点  $(0, 2)$  を中  
 心としている。  
 このとき、2つの円で囲まれる領域を  $x$  軸を中心として回  
 転させてできる図形の体積  $V_x$  と、 $y$  軸を中心として回転さ  
 せた場合にできる図形の体積  $V_y$  とをそれぞれ求めよ。

