

# 数学オリンピック・2011 (第3回)

以下の9つの問題に解答して下さい。

## 課題1

1から5までの数字と括弧と四則演算子 (+ - × ÷) とを使って自然数をつくる時、1からいくつまでの数字を連続してつくることができるか答えよ。

例:

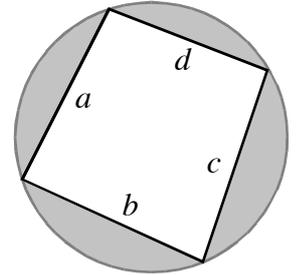
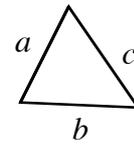
- $(-1-2+3) \times 4 \times 5 = 0$
- $(1+2) \times 3 \times 4 \times 5 = 180$

ただし以下のルールに従うものとする。

- 1, 2, 3, 4, 5の数字はこの順番で1回だけ必ず使用する
- 1, 2, 3, 4, 5は一桁の数字としてつかう (演算子が数字の間に必ず存在する)
- 数字を指数部に置くことはできない
- 平方根・累乗根は使用できない
- 「連続でつくることができる」数字は「1, 2, 3, ..., (N-1), Nはつくれるが(N+1)はつくれない」という場合は「N」であるとする
- 括弧は何回使用してもよい
- 減算の記号である「-」は負の数字を表すために使用してもよい。

## 課題2

三辺の長さがそれぞれ  $a, b, c$  である三角形がある。この三角形の面積  $S$  を求めよ。



## 課題3

円に内接する四角形がある。四辺の長さがそれぞれ  $a, b, c, d$  であるときこの四角形の面積  $S$  を求めよ。

## 課題4

$\pi$  (パイ) の近似値を求めたい。その近似値を与える既約分数をつくりたい。この既約分数を求めるための方法論を示した上で、具体的な値を示せ。ただしコンピューターを用いることが必要な複雑な計算方法は認めない。(紙と鉛筆の筆算で計算できる方法のみとする。) また、同じ手法において有効数字の桁数を必要なだけ増やすことができることが必要である。

(既知の  $\pi$  の値を用いてはいけない。例えば  $314/100$  のような分数の作り方は不正解とする。)

## 課題5

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$xy$ 平面上に右の式で表される楕円がある。

この楕円を点(4,3)を回転中心として反時計回り( $x$ 軸の正の方向から $y$ 軸の正の方向へ)に $45^\circ$  回転させてできる図形がある。

- (1)この楕円の周を表す式を求めよ。
- (2)この楕円の周及び周で囲まれる部分が $x$ 軸を軸として回転してできる図形の体積 $V_x$ と、 $y$ 軸を軸として回転してできる図形の体積 $V_y$ をそれぞれ求めよ。

## 課題6

以下の数列の一般項を求めよ。

- (1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
- (2) 1, 1, 0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, ...
- (3) 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, ...

## 課題7

以下の文字列の空欄を埋めよ。

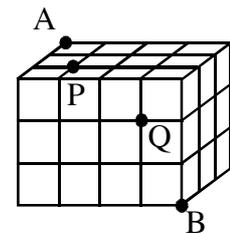
- (1) 松、梅、桜、藤、、牡丹、芒、菊、紅葉、柳、
- (2) 葡萄、霧、霜、雨、風、、花、牧、収穫、、実

## 課題8

右に示すような36個の立方体を積み上げてつくった直方体があり、頂点Aから頂点Bへ向かってこの立方体に各辺によってつくられる格子に沿って移動する場合を考える。

- (1) AからBへ最短で至る経路は何通りあるか答えよ。
- (2) (1)において点Pは通らず、かつ、点Qを必ず通る経路は何通りあるか答えよ。

※移動できる経路は表面のみではないことに注意。



## 課題9

$xy$ 平面上に長さ  $L$  の線分がある。この線分的一方の端が  $x$ 軸上を、他方の端が  $y$ 軸上を移動するときに見える包絡線の式と、 $x$ 軸・ $y$ 軸とこの包絡線によって囲まれてできる図形の面積  $S$  を求めよ。ただし線分は第一象限にあるとする。