

令和 9 年度 豊橋技術科学大学大学院工学研究科博士前期課程
入学者選抜学力検査問題

基 礎 科 目 （ 機 械 工 学 専 攻 ）

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図まで、この問題冊子と解答用紙を開いてはいけません。
- 2 問題冊子の枚数は、表紙、草稿用紙を含めて 6 枚です。
- 3 問題冊子とは別に解答用紙が 4 枚あります。
- 4 問題は 4 問あります。全問解答してください。
- 5 試験開始の合図の後すぐに、すべての解答用紙の所定の箇所に受験番号を記入してください。
- 6 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入してください。解答用紙の裏面には解答を記入しないでください。
- 7 落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあれば、ただちに申し出てください。
- 8 問題冊子の余白は草稿用として使用しても構いません。
- 9 試験終了時刻まで退出してはいけません。
- 10 問題冊子は持ち帰ってください。

(草 稿 用 紙)

- [1] 通電することで内部に一様な発熱が生じる長さ L の金属部品がある。金属部品を1次元棒とみなし、左端からの距離を x とする。通電されている金属部品の定常状態における温度分布を $T(x)$ とする。なお、 k および Q は正の定数であり、それぞれ有効熱伝導係数および単位長さあたりの発熱量である。以下の問いに答えよ。

- (1) 金属部品の側面から周囲への放熱を無視できるものとするとき、 $T(x)$ は以下を満たす。

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + Q = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

以下の設問に答えよ。

ア．式①の一般解を、任意定数を用いて表せ。

イ．金属部品の両端に一定温度 T_0 に保たれた冷却板を接触させたとき、 $T(x)$ を求めよ。

ウ．設問イで求めた温度分布について、最大温度 $T_{\max}$ を求めよ。

- (2) 金属部品の側面から周囲への放熱を考慮すると、位置 x における側面からの放熱量は、その位置における温度 $T(x)$ と周囲温度 T_a との差に比例する。 h を正の比例定数とすると、側面から周囲への放熱を考慮した $T(x)$ は、定常状態において以下を満たす。

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + Q - h\{T(x) - T_a\} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

この微分方程式の一般解を、任意定数を用いて表せ。

[2] 以下の行列 X , Y および A に関する問いに答えよ。ただし, a と b は実数とする。

$$X = \begin{bmatrix} -2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix}, \quad A = XY$$

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) AA^T を求めよ。ただし, A^T は行列 A の転置行列とする。
- (3) $a = 5$ および $b = -1$ のとき, $A^2 + A + I$ を求めよ。ただし, I は単位行列とする。
- (4) 問(3)の条件を満たすとき, A^{35} を求めよ。

[3] 以下の問いに答えよ。ただし、 x と y は実数、 i は虚数単位、 z は $z = x + iy$ で表される複素数である。

(1) $\left(\frac{3-2i}{1-i}\right)^2$ を $a+ib$ の形に表せ。ここで、 a と b は実数である。

(2) $(z-1)^2+9=0$ を解き、解答用紙に複素平面上の根の位置を×印で示せ。

(3) 次の複素関数

$$f(x, y) = \{x \cos y + y \sin y + i(y \cos y - x \sin y)\}e^{-x}$$

について、コーシー・リーマンの微分方程式を満足するか判定せよ。

(4) 次の複素関数

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)^2+9}$$

について以下の設問に答えよ。

ア. $g(z)$ の特異点をすべて求めよ。

イ. 設問アで求めた特異点における $g(z)$ の留数を求めよ。

ウ. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ を計算せよ。

[4] 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

と定義される。ただし、 s はラプラス変換の変数である。以下の設問に答えよ。
 なお、 s の実部は正で十分大きく、以下のラプラス変換は収束するものとする。
 また、 a, b, c を実定数とする。

ア．関数 $g(t) = e^{at}$ のラプラス変換を求めよ。

イ．関数 $h(t) = e^{at} f(t)$ のラプラス変換は $F(y)$ と表される。 y を求めよ。

ウ．正弦関数と余弦関数のラプラス変換は

$$L\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad L\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

である。関数 $p(t) = e^{at}\{1 - \cos(bt - c)\}$ のラプラス変換を求めよ。

(2) 周期 2π の周期関数

$$q(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

を次のようにフーリエ級数展開する。

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\}$$

ただし、 a_0, a_m, b_m は実定数である。以下の設問に答えよ。

ア． a_0, a_m, b_m を求めよ。

イ．次の級数の値を求めよ。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$