

令和 9 年度 大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（機械工学専攻）

[1]

(1)

ア.

$k \neq 0$ より,

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\frac{Q}{k}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \int \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = -\frac{Q}{k}x + C_1$$

$$T(x) = \int \frac{dT(x)}{dx} dx = -\frac{Q}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

ただし, C_1 , C_2 は任意定数である。

イ. 金属部品両端に一定温度 T_0 の冷却板が接触しているので, 境界条件は,
 $T(0) = T_0$, $T(L) = T_0$ である。

$T(0) = T_0$ より, $C_2 = T_0$

また, $T(L) = T_0$ より,

$$T_0 = -\frac{Q}{2k}L^2 + C_1L + T_0$$

従って,

$$C_1 = \frac{QL}{2k}$$

である。よって, 温度分布は,

$$T(x) = T_0 + \frac{Q}{2k}x(L-x)$$

ウ. 設問アより, $T''(x) < 0$ であることが明らかであるから, $T(x)$ は上に凸の放物線である。すなわち, $T'(x) = 0$ となる位置において最大温度を与える。
したがって,

$$T'(x) = \frac{Q}{2k}(L-2x) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

において最大温度となるから $T_{\max}$ は,

$$T_{\max} = T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{QL^2}{8k}$$

(2) 式②を整理して両辺を $k \neq 0$ で割ると,

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{h}{k}T(x) = -\frac{Q + hT_a}{k}$$

ここで, 定数 $\sqrt{\frac{h}{k}}$ を α とおくと,

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \alpha^2 T(x) = -\frac{Q + hT_a}{k} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。対応する同次方程式

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \alpha^2 T(x) = 0$$

に対して $T(x) = e^{rx}$ の形の解を仮定すると、同次方程式は、

$$r^2 e^{rx} - \alpha^2 e^{rx} = 0$$

$$(r^2 - \alpha^2) e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} \neq 0 \text{ より,}$$

$$(r + \alpha)(r - \alpha) = 0$$

従って、同次方程式の一般解 $T_h(x)$ は、

$$T_h(x) = C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x}$$

である。ただし、 C_3 , C_4 は任意定数である。非同次方程式 $\textcircled{3}$ について、右辺は定数であるため、特殊解 $T_p(x)$ も定数であると仮定して、 $T_p(x) = A$ とおくと、

$$0 - \alpha^2 A = -\frac{Q + hT_a}{k}$$

$$\text{したがって, } \alpha = \sqrt{\frac{h}{k}} \text{ より,}$$

$$T_p(x) = A = \frac{Q + hT_a}{\alpha^2 k} = T_a + \frac{Q}{h}$$

非同次線形微分方程式の一般解は、対応する同次方程式の一般解と特殊解の和で与えられる。したがって、

$$T(x) = T_h(x) + T_p(x) = C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} + T_a + \frac{Q}{h}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{h}{k}} \text{ より,}$$

$$T(x) = C_3 e^{\sqrt{\frac{h}{k}} x} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{h}{k}} x} + T_a + \frac{Q}{h}$$

(別解：変数変換により同次方程式に帰着して解くなどしてもよい。)

[2]

(1) X と Y を乗じると 2×2 の行列となる。

$$A = XY = \begin{bmatrix} -2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & a-6 \\ 3 & 2+b \end{bmatrix}$$

(2) $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ a-6 & 2+b \end{bmatrix}$ なので

$$AA^T = \begin{bmatrix} -2 & a-6 \\ 3 & 2+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ a-6 & 2+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + (a-6)^2 & -6 + (a-6)(2+b) \\ -6 + (a-6)(2+b) & 9 + (2+b)^2 \end{bmatrix}$$

あるいは、展開して

$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2 - 12a + 40 & ab + 2a - 6b - 18 \\ ab + 2a - 6b - 18 & b^2 + 4b + 13 \end{bmatrix}$$

(3) 題意を満たす場合、行列 A は以下となる。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ つまり}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{零行列})$$

(4) 零行列を O と表記すると $A^2 + A + I = O \quad \dots(*)$

上式の両辺に A を作用させると $A^3 + A^2 + A = O$ 。

(*)から $A^2 + A = -I$ なので $A^3 = I$ 。

すなわち

$$A^{35} = (A^3)^{11} A^2 = I A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

[3]

(1) 与式の分母を有理化して計算を進めると以下のようになる。

$$\left(\frac{3-2i}{1-i}\right)^2 = \left\{\frac{(3-2i)(1+i)}{2}\right\}^2 = \left(\frac{5+i}{2}\right)^2 = 6 + \frac{5}{2}i$$

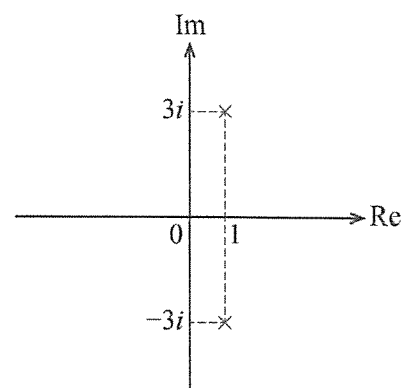
(2) 与式を因数分解して

$$\{(z-1)+3i\}\{(z-1)-3i\}=0$$

これより

$$z = 1 \pm 3i$$

複素平面上の根の位置を右図に×印で示す。



別解として、与式を展開して解の公式を用いてもよい。

(3) 次の複素関数

$$f(x,y) = \{x \cos y + y \sin y + i(y \cos y - x \sin y)\}e^{-x}$$

について、 $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ として、 $u(x,y)$ を実部、 $v(x,y)$ を虚部とすると

$$u(x,y) = (x \cos y + y \sin y)e^{-x}$$

$$v(x,y) = (y \cos y - x \sin y)e^{-x}$$

となり、 $u(x,y), v(x,y)$ を x, y で偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \{(1-x) \cos y - y \sin y\}e^{-x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \{(1-x) \sin y + y \cos y\}e^{-x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\{(1-x) \sin y + y \cos y\}e^{-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \{(1-x) \cos y - y \sin y\}e^{-x}$$

となることより、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ であるから、コーシー・リーマンの微分方程式を満足する。

(4)

ア. 問(2)を参照して, $g(z)$ の特異点は $z = 1 \pm 3i$ と求まる。

イ. $z = 1 - 3i$ の留数は

$$\lim_{z \rightarrow 1-3i} g(z)(z-1+3i) = \frac{i}{6}$$

であり, $z = 1 + 3i$ の留数は

$$\lim_{z \rightarrow 1+3i} g(z)(z-1-3i) = -\frac{i}{6}$$

と求まる。

ウ. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ を計算するために, 右下図に示すように, 実軸上の経路I, $z = 1$ を中心 to 十分大きい半径 R の半円を反時計回りにまわる経路II, $z = 1 + 3i$ を時計回りに一周する経路IIIに沿って上半平面の特異点を避けて複素関数 $g(z)$ を積分するとき, コーシーの積分定理より

$$\int_I g(z)dz + \int_{II} g(z)dz + \int_{III} g(z)dz = 0$$

である。各経路の積分は, $R \rightarrow \infty$ の極限を取ると

$$\int_I g(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x-1)^2 + 9} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$$

$$\int_{II} g(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} + 9} d\theta = 0$$

ここで, 半径 R , 偏角 θ を用いて $z = 1 + Re^{i\theta}$ とした。

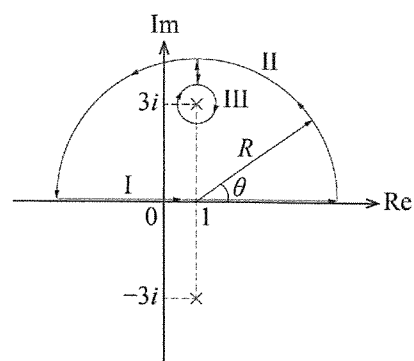
$$\int_{III} g(z)dz = -2\pi i \lim_{z \rightarrow 1+3i} g(z)(z-1-3i) = -\frac{\pi}{3}$$

ここで, 経路IIIの積分には留数定理を用いた。以上より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \frac{\pi}{3}$$

と求まる。

別解として, 経路IIを下半平面に取る場合も同様の手順で計算できる。



(1)

ア .

$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{-s+a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

イ .

$$L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a), \quad \therefore y = s-a$$

ウ .

$$p(t) = e^{at}\{1 - \cos(bt-c)\} = e^{at} - e^{at}\{\cos(bt)\cos c + \sin(bt)\sin c\}$$

であるので，設問アと設問イの結果を考慮し，各項をラプラス変換すると

$$P(s) = \frac{1}{s-a} - \frac{(s-a)\cos c}{(s-a)^2 + b^2} - \frac{b\sin c}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{(s-a)^2 + b^2 - (s-a)^2 \cos c - (s-a)b\sin c}{(s-a)\{(s-a)^2 + b^2\}}$$

(2)

ア .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x^2 \frac{\sin(mx)}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{m} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx) dx \right\} \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(mx)}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx \right\} \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(mx)}{m} + \frac{\sin(mx)}{m^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{2}{m^2\pi} \{ \pi \cos(m\pi) - (-\pi) \cos(-m\pi) \} \\ &= \frac{4}{m^2} \cos(m\pi) = \frac{4(-1)^m}{m^2} \end{aligned}$$

与式は偶関数なので， $b_m = 0$

イ .

設問アの結果より，与式のフーリエ級数展開は

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{4(-1)^m}{m^2} \cos(mx) \right\}$$

$x = \pi$ を代入すると

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2m}}{m^2} \quad \therefore \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$