

令和 9 年度 大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（情報・知能工学専攻）

[1] 解答例

- (1) 関数 $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 6y + 6$ の偏微分はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 4y - 2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4x + 8y + 6$$

となる。

- (2) 問(1)の結果より, $x = -2y$ を満足する点 P においては

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_P = 2(-2y) + 4y - 2 = -4y + 4y - 2 = -2$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_P = 4(-2y) + 8y + 6 = -8y + 8y + 6 = 6$$

となり, 点 P における勾配ベクトル $\nabla f(P)$ は次に示す定数ベクトルとなる。

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- (3) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 行列 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$, ベクトル $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$, スカラ C として与式を展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^\top \mathbf{Q} \mathbf{r} + \mathbf{s}^\top \mathbf{r} + C &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_x & s_y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C \\ &= Q_{11}x^2 + (Q_{12} + Q_{21})xy + Q_{22}y^2 + s_x x + s_y y + C \end{aligned}$$

となるから, これと与式

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + 6y + 6$$

を比較することで, 2×2 の対称行列 $\mathbf{Q}$, 2次元ベクトル $\mathbf{s}$, スカラ C はそれぞれ次のようになる。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = 6$$

ただし行列 $\mathbf{Q}$ は対称行列であるため, $Q_{12} = Q_{21}$ とする必要がある。

- (4) 固有方程式

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

より, 固有値 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$ を得る ($\lambda_1 \geq \lambda_2$)。

$\lambda_1 = 5$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ より, 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 5x_1 \\ 2x_1 + 4y_1 = 5y_1 \end{cases}$$

を解いて $y_1 = 2x_1$ を得る。よって $x_1 = 1$ とおいて正規化すれば、次式を得る。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

同様に、 $\lambda_2 = 0$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} x_2 + 2y_2 = 0 \\ 2x_2 + 4y_2 = 0 \end{cases}$$

を解いて $x_2 = -2y_2$ を得る。 x_2 が正になるように符号合わせと正規化を行うと次式を得る。

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(5) 固有ベクトル $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は、

$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$$

かつ

$$\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5} (1 \times 2 + 2 \times (-1)) = 0$$

を満足するから、互いに直交する単位ベクトルとなり、行列 $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ は直交行列となる。よって、 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$ であるから、この行列 $\mathbf{P}$ を使って行列 $\mathbf{Q}$ を対角化すると次式を得る。

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \mathbf{Q} \mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

※逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を求めて対角化しても可。

(6) (イ) 直交変換

※直交行列による変換であるから、直交変換（回転／対称変換／回転＋対称変換のいずれか）となる。

(7) (ク) 放物線

※対角化後の y^2 の係数が 0 となるから。

[2]

- (1) 赤チームが白チームに勝って青チームに敗れる場合と、赤チームが白チームに敗れて青チームに勝つ場合に、赤チームは1勝1敗となる。これら2つの事象は互いに排反である。あるチームが他のチームに敗れる事象は勝利する事象の余事象であるので、求める確率は、

$$\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- (2) $X=0$ の確率は、白チームが赤チームに敗れる事象と白チームが青チームに敗れる事象は独立であるから

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$X=1$ の確率は、白チームが赤チームに勝ち青チームに敗れる確率と、白チームが赤チームに敗れ青チームに勝つ確率の和に等しい。よって

$$P(X=1) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

$X=2$ の確率は、白チームが赤チームに勝つ事象と白チームが青チームに勝つ事象は独立であるから

$$P(X=2) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

- (3) 問(2)の結果を用いると、白チームの勝数の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

- (4) すべてのチームが1勝1敗となるのは、以下の2通りである。

1. 赤チームが白チームに勝ち、白チームが青チームに勝ち、青チームが赤チームに勝つ
2. 赤チームが青チームに勝ち、白チームが赤チームに勝ち、青チームが白チームに勝つ

これらは互いに排反であるので、求める確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{24}$$

- (5) 1回の総当たり戦で青チームが2勝する確率は

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

である。すべてのチームが1勝1敗となる確率は問(4)より $\frac{7}{24}$ であるから、求める確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{7}{24} \times \frac{1}{8} + \left(\frac{7}{24}\right)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{793}{4608}$$

(6) 最大 N 回の総当たり戦で青チームが優勝する確率を $Q(N)$ とする。 $Q(N)$ は初項 $\frac{1}{8}$ 、公比 $\frac{7}{24}$ 、項数 N の等比級数であり

$$Q(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{24}\right)^{n-1} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{7}{24}\right)^N}{1 - \left(\frac{7}{24}\right)} = \frac{3}{17} \left\{ 1 - \left(\frac{7}{24}\right)^N \right\}$$

総当たり戦の回数を制限しないので、 $N \rightarrow \infty$ とすれば求める確率は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q(N) = \frac{3}{17}$$

[3]

(1)

ア	10	イ	20	ウ	30
---	----	---	----	---	----

(2)

エ	--	オ	##	カ	##
キ	--	ク	##	ケ	##
コ	4	サ	ee	シ	40

(3)

ス	1	セ	bb	ソ	50
タ	--	チ	##	ツ	##
テ	4	ト	ee	ナ	40

(4)

ニ	40	ヌ	-2
---	----	---	----

(5)

(B)

(6)

ア .	5	イ .	(E)
-----	---	-----	-------

(7)

(A)

(8)

(A)
