

令和 9 年度 大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（電気・電子情報工学専攻）

[1] 解答例

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots, \quad \sin x = x + \cdots$$

より,

$$e^x - \cos x - \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + \cdots = x^2 + \cdots$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} = 1$$

(2)

ア.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -e^x \sin y$$

イ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots, \quad \sin y = y + \cdots$

したがって二次の項まででは, $f(x, y) = e^x \sin y = y + xy + \cdots$

よって, $f(x, y) = y + xy$

(3)

部分積分より,

$$u = \log(1+x), \quad dv = x^2 dx, \quad du = \frac{1}{1+x} dx, \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 \log(1+x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \log(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx$$

$$\frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x}$$

より,

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 = \frac{5}{6} - \log 2$$

したがって

$$\int_0^1 x^2 \log(1+x) dx = \frac{2}{3} \log 2 - \frac{5}{18}$$

(4)

極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dxdy = r drd\theta$ を用いると, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r drd\theta = 2\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr$$

$u = r^2$, $du = 2rdr$ と置く と

$$2\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \pi(e-1)$$

したがって,

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy = \pi(e-1)$$

[2] 解答例

(1)

$$\text{ア. } AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+10 & 6+2 & 0+8 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \\ -2+5 & 4+1 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

イ. $AC =$ (定義されない)

A の列数と C の行数が一致しないため、定義されない (計算不可能)。

$$\text{ウ. } AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & 3+0 & 6+2 \\ 3+0 & 1+0 & 2+0 \\ 6+2 & 2+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(2)

与えられた連立一次方程式の拡大係数行列に対して、行基本変形を行う。

【解答例A：行階段形による判定】

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & a+1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 4 & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -a-1 \\ 0 & 7 & 4 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & -3a-8 \end{bmatrix}$$

【解答例B：既約行階段形による判定】

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & a+1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 4 & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{-a+5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{2a+4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -3a-8 \end{bmatrix}$$

係数行列 A の階数 (ランク) は

$$\text{rank} A = 2$$

連立一次方程式が解をもつための必要十分条件は、係数行列の階数と拡大係数行列の階数が一致することである。

$$-3a-8=0$$

これより、求める a の値は

$$a = -\frac{8}{3}$$

(3)

行列が正則であるための必要十分条件は、行列式が 0 でないことである。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & a \\ a+2 & a & 2 \\ a+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)(1-a)$$

行列が正則となるためには、

$$(a+2)(a-1)(1-a) \neq 0$$

これより，求める a の条件は

$$a \neq -2, 1$$

(4)

第1列に第2列，第3列～第 n 列をすべて足すと，第1列の成分はすべて $a + (n-1)b$ となる。

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

第2行，第3行～第 n 行からそれぞれ第1行を引くと，

$$= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

第1列に関して余因子展開を行うと，

$$= a+(n-1)b \begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

対角行列より，対角成分の積を用いて，

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

[3] 解答例

(1)

ア. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ において,

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

とおく。偏微分して

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

したがって,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つ。よって, コーシー・リーマンの関係式を満たすので, $f(z)$ は正則である。

イ. $z = x + iy$ より, $z^3 = (x + iy)^3$ を展開する。

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + iy)^3 \\ &= x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

与えられた $f(z)$ と一致するので, $f(z) = z^3$

$$\text{よって, } f'(z) = 3z^2 = 3x^2 + i6xy - 3y^2$$

(2)

ア. 始めに,

$$\frac{1}{(1-2z)}$$

のテーラー展開を求めるが, ここでは等比級数であることを利用して,

$$\frac{1}{(1-2z)} = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots$$

を得る。 $1/z^2$ をかけると求める式が得られる。

$$f(z) = \frac{1}{z^2} (1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 4 + 8z + \cdots$$

一般項は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n-2}$$

イ. 留数はローラン展開の $1/z$ の係数なので,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 2$$

(3)

ア.

$$I = \oint_C \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz, \quad C: |z| = 3$$

の特異点を求める。分母は, $z(z^2 + 4) = z(z - 2i)(z + 2i)$ であるので, 特異点は $z = 0, z = 2i, z = -2i$ になり, これらはすべて $|z| = 3$ の内部にある。
被積分関数を

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - 2i)(z + 2i)}$$

とすると, 各特異点における留数は

$$z = 0 \quad \operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4} = \frac{1}{4}$$

$$z = 2i \quad \operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 1}{z(z + 2i)} = \frac{-4 + 1}{(2i)(4i)} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$z = -2i \quad \operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 + 1}{z(z - 2i)} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

イ. 留数定理より,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) = 2\pi i \end{aligned}$$