

令和 9 年度 豊橋技術科学大学第 3 年次入学者選抜学力検査問題解答例

応 用 数 学

[1]

(1)

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

を解くと、求める固有値は $\lambda = 0, 3$ である。

(2) 行基本変形より、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

つまり、 $x - y - z = 0$ であるので、 $y = c_1, z = c_2$ とおくと、 $x = c_1 + c_2$ である。したがって、求める解は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ただし、 c_1, c_2 は任意定数である。

(3)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とおくと, (条件2) は } \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0, \text{ (条件3) は } |\mathbf{x}| = 1 \text{ と同値で}$$

ある。また、(2) より、(条件1) の連立1次方程式の解は、

$$c_1 \mathbf{a} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって、まずは(条件1)の連立1次方程式の解で(条件2)である $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$

をみたすベクトルを求める。ここで、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として、 $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$ とおく。このとき、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot (c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}) = c_1 |\mathbf{a}|^2 + c_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

であるから、 $c_1 = -\frac{1}{2}c_2$ であるので、

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2}c_2 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = -\frac{1}{2}c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ただし、 c_2 は任意定数である。このように表されるベクトル $\mathbf{x}$ の内、(条件3) である $|\mathbf{x}| = 1$ をみたすベクトルが求めるベクトルであるので、3つの条件をみたすベクトルは、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

[2]

(1)

ア.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) &= e^x \cos(x - 2y) - e^x \sin(x - 2y), \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) &= 2e^x \sin(x - 2y)\end{aligned}$$

イ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, y) &= -2e^x \sin(x - 2y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) &= 2e^x \{\cos(x - 2y) + \sin(x - 2y)\}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x, y) &= -4e^x \cos(x - 2y)\end{aligned}$$

(2)

ア.

$$\begin{aligned}\iint_D x \, dx dy &= \int_1^e \left\{ \int_0^{\log x} x \, dy \right\} dx = \int_1^e x \log x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x \, dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

イ. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと, 領域 D は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で表される。また, ヤコビアン $J(r, \theta) = r$ より,

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^1 r^2 \, dr \right\} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \, d\theta = \frac{\pi}{12}$$

[3]

(1)

ア. 偶数の目が2回, 奇数の目が7回なので, 求める確率は,

$$P_9(2) = {}_9C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{9}{128}$$

イ. ${}_9C_2 = {}_9C_7$ であるので, アより,

$$P_9(7) = {}_9C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}_9C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{9}{128}$$

ウ. ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ であるので, $P_n(k) = P_n(n-k)$ である。したがって,

$$\sum_{k=0}^4 P_9(k) = \sum_{k=5}^9 P_9(k)$$

であり,

$$\sum_{k=0}^9 P_9(k) = 1$$

であることから,

$$\sum_{k=0}^4 P_9(k) = \frac{1}{2}$$

エ. ウと同様に考えると,

$$2 \sum_{k=0}^4 P_{10}(k) + P_{10}(5) = 1$$

したがって,

$$\sum_{k=0}^4 P_{10}(k) = \frac{1}{2} (1 - P_{10}(5)) = \frac{1}{2} \left(1 - {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right) = \frac{193}{512}$$

(2)

ア.

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\sin t \cos t = -\frac{1}{2} \sin 2t$$

の両辺を積分すると,

$$v(t) = -\frac{1}{2} \int \sin 2t \, dt = \frac{1}{4} \cos 2t + C$$

ただし, C は任意定数である。 $v(0) = \frac{1}{4}$ より, $C = 0$ である。したがって, $v_0(t) = \frac{1}{4} \cos 2t$

より, $v_0\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$

イ. ロピタルの定理を用いて, 微分方程式を代入すると,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - 4v_0(t)} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{v_0'(t)} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t \cos t} = \frac{1}{2}$$