令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜
（一般入試[第２次募集]，外国人留学生入試）
学力検査問題解答例

基礎科目（機械工学専攻）

［１］

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x(y^2-x^2)-2xy(2y)}{(y^2-x^2)^2}=\frac{-2x^3-2xy^2}{(y^2-x^2)^2}$$

(2)

$$f(tx,ty)=\frac{2txty}{(ty)^2-(tx)^2}=\frac{2t^2xy}{t^2y^2-t^2x^2}=\frac{2xy}{y^2-x^2}$$

よって，$f(tx,ty)=f(x,y)$が成り立つ。

(3)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}v+x\frac{dv}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

(4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{y^2-x^2}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2x(xv)}{(xv)^2-x^2}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2x^2v}{x^2v^2-x^2}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2v}{v^2-1}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2v}{v^2-1}-v=x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2v}{v^2-1}-\frac{v(v^2-1)}{v^2-1}=x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{2v-v^3+v}{v^2-1}=x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{-v^3+3v}{v^2-1}=x\frac{dv}{dx}$$

ここで，$\frac{-v^3+3v}{v^2-1}=0$のとき，

$$-v^3+3v=0$$

$$-v^2+3=0$$

$$v^2=3$$

$v=\pm\sqrt{3}$より，$y=\pm\sqrt{3}x$ が得られる。

$\frac{-v^3+3v}{v^2-1}\neq 0$のとき，

$$\frac{1}{x}dx=\frac{v^2-1}{-v^3+3v}dv$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{v^2-1}{v^3-3v}dv=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{v^2-1}{v(v^2-3)}dv=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v}+\frac{2v}{v^2-3}\right)dv=0$$

$$\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v}+\frac{2v}{v^2-3}\right)dv=c$$

（ここで，cは任意の定数）

$$\ln|x|+\frac{1}{3}(\ln|v|+\ln|v^2-3|)=c$$

$$3\ln|x|+\ln|v|+\ln|v^2-3|=3c$$

$$\ln|x^3 v(v^2-3)| = 3c$$

$$x^3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3x^3\frac{y}{x} = c'$$

従って，一般解は，$y^3 - 3x^2y = c'$（ここで，c'は任意の定数）である。

［２］

(1)

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{a-6}\begin{bmatrix} a & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a-6}\begin{bmatrix} a \\ -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

(3)

$A^TAY = A^TB$に問(2)の結果を代入し，$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$を得る。

この特殊解の一つは$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$

また，$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$の解は$Z = b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$（$b$は任意の実数）

したがって，解は，$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(4)

問(3)の結果より

$$Y^TY = \left(\frac{1}{10} + 2b\right)^2 + b^2 = 5b^2 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{100} = 5\left(b + \frac{1}{25}\right)^2 - \frac{5}{25^2} + \frac{1}{100}$$

上式を最も小さくするのは$b = -\frac{1}{25}$

よって，$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{25} \end{bmatrix}$

[3]

(1)

ア． $z_0 = 1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

イ． $\left(\frac{z_0}{2}\right)^{10} = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{10} = e^{\frac{10\pi}{3}i}$と計算される。$\frac{10\pi}{3}$は主値の範囲を超えており，主値を求めるために式変形すると，$e^{\frac{10\pi}{3}i} = e^{\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)i} = e^{4\pi i}e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ となる。よって偏角の主値は$-\frac{2\pi}{3}$。

(2)

ア． $z^2+3z+2=0$を解けばよい。これを解くと，特異点は-1と-2。

イ． $z^3+3=0$を解けばよい。この式は極座標表示と2つの実数$r>0$とθを用いて，$\left(re^{i\theta}\right)^3 = -3$と書き直せる。$-3 = 3e^{(2n+1)\pi i}$であること（$n$は任意の整数）から，$r^3=3$，$3\theta = (2n+1)\pi$と求められる。よって，$r=\sqrt[3]{3}$，また偏角の主値が$-\pi$から$\pi$であることに注意して$\theta$を求めると$\theta = -\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\pi$である。よって零点は$\sqrt[3]{3}e^{-\frac{\pi}{3}i},\sqrt[3]{3}e^{\frac{\pi}{3}i},-\sqrt[3]{3}$。極形式で表さない場合は$\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right),\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right),-\sqrt[3]{3}$ 。

(3)

ア． 極は±2である。極-2に対応する留数は$\operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{\sin z}{z^2-4} = \lim_{z\to-2}\frac{\sin z}{z-2} = \frac{\sin 2}{4}$，極2に対応する留数は$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{\sin z}{z^2-4} = \lim_{z\to2}\frac{\sin z}{z+2} = \frac{\sin 2}{4}$。

イ． この場合，極2が円の内部にある。留数定理より，積分の値は$2\pi i\cdot\frac{\sin 2}{4} = \frac{\pi i\sin 2}{2}$と計算される。

［４］

（1）

$$\frac{s-6}{s^2-3s+2}=\frac{s-6}{(s-2)(s-1)}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-1)}=\frac{-4}{(s-2)}+\frac{5}{(s-1)}$$

$$=-4\mathcal{L}\{e^{2t}\}+5\mathcal{L}\{e^{t}\}=\ \mathcal{L}\{-4e^{2t}+5e^{t}\}$$

$$\therefore f(t)=-4e^{2t}+5e^{t}$$

（2）

$$\frac{d}{ds}G(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty \frac{d}{ds}(g(t)e^{-st})dt=\int_0^\infty -te^{-st}g(t)dt=\int_0^\infty \big(-tg(t)\big)e^{-st}dt$$

$$=\mathcal{L}\{-tg(t)\}$$

（3）

ア．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt=\frac{1}{\pi}\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

イ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)+\sin\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)t\right)\right\}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right)+\frac{2}{2n-1}\cos\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)t\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{2n+1}+\frac{-2}{2n-1}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-4}{(2n+1)(2n-1)}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}\right]$$

ウ.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)t\right)\right\}dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)t\right) + \frac{2}{2n-1}\sin\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)t\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{2n+1}(-1)^{n-1} + \frac{-2}{2n-1}(-1)^{n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}2n}{(2n+1)(2n-1)}\right]$$

エ.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\{-\cos(nt) + (-1)^{n-1}2n\sin(nt)\}$$