令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜
（一般入試［第２次募集］，外国人留学生入試）
学力検査問題解答例

# 基礎科目（情報・知能工学専攻）

［１］

（1）　$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+3x=0$に$\frac{dx}{dt}=y$を代入すると$\frac{dy}{dt}-4y+3x=0$となる。これと$\frac{dx}{dt}=y$とで連立微分方式として記述すると$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\-3x+4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$となる。したがって，行列$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&4\end{bmatrix}$である。

（2）　固有方程式$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$を解くと，$\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-3&4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(4-\lambda)+3=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$となり，$\lambda_1=3,\lambda_2=1$が得られる。$\boldsymbol{e_1}$は$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{0}$を満たすので$-3+c=0$，したがって$\boldsymbol{e_1}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$となる。同様に，$\boldsymbol{e_2}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$となる。

（3）　(2)で求めた固有縦ベクトルを用いて$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e_1}\quad\boldsymbol{e_2}]=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$と設定する。逆行列は$\boldsymbol{P^{-1}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\3&-1\end{bmatrix}$となる。したがって，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P^{-1}AP}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$の形に対角化できる。

（4）　（3）より$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP^{-1}}$なので，与えられた微分方程式は$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{PDP^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$となる。この式の両辺に左から$\boldsymbol{P^{-1}}$を掛けると$\boldsymbol{P^{-1}}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}PDP^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$で，さらに$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{DP^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$となる。ここで$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$とおくと，$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$より，$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$となる。$\frac{d}{dt}u=3u$より$u=c_1e^{3t}$，$\frac{d}{dt}v=v$より$v=c_2e^t$とそれぞれ解ける（$c_1,c_2$は任意定数）。$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$より$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{3t}\\c_2e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{3t}+c_2e^t\\3c_1e^{3t}+c_2e^t\end{bmatrix}$となる。$x(0)=0,y(0)=2$なので，$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2\\3c_1+c_2\end{bmatrix}$から$c_1=1,c_2=-1$となる。したがって，$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{3t}-e^t\\3e^{3t}-e^t\end{bmatrix}$となる。

［２］

以下，3つのサイコロの目を(a, b, c)とする。

(1) 全事象は$6^3 = 216$ 通り。

出た目がすべて異なる場合の数は，6つの目から3つを選んで並べる順列の数である。

${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ 通り

よって，求める確率は，

$$120/216 = 5/9$$

(2) 3つのサイコロの出た目の和が6になる組み合わせを列挙する。

3つの数の組み合わせとその並べ方：

・(1, 1, 4)：並べ方は $3!/2! = 3$ 通り

・(1, 2, 3)：並べ方は $3! = 6$ 通り

・(2, 2, 2)：並べ方は 1通り

合計：$3 + 6 + 1 = 10$ 通り

よって，求める確率は，

$$10/216 = 5/108$$

(3) 最大値が4である確率を求める。

最大値が4 ⇔ すべての目が4以下かつ少なくとも1つは4

・すべての目が4以下となる場合の数：$4^3 = 64$ 通り。

・すべての目が3以下となる場合の数：$3^3 = 27$ 通り。

・最大値がちょうど4である場合の数：$64 - 27 = 37$ 通り。

よって，求める確率は，

$$37/216$$

(4) 1回の操作で3つとも同じ目が出る場合は，(1, 1, 1), (2, 2, 2), …, (6, 6, 6)の6通り。

1回の操作で3つとも同じ目が出る確率：$p = 6/216 = 1/36$

2回の操作で少なくとも1回は3つとも同じ目が出る確率は，余事象を用いて：

・2回とも3つが同じ目にならない確率：$(1 - 1/36)^2 = (35/36)^2 = 1225/1296$

・求める確率：$1 - 1225/1296 = 71/1296$

よって，求める確率は，

$$71/1296$$

(5) 各サイコロの目を$X_1$, $X_2$, $X_3$とする。各$X_i$は独立で同一分布に従う。

1つのサイコロについて：

・ $E[X_i] = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 7/2$

・ $E[X_i{}^2] = (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)/6 = 91/6$

・ $V[X_i] = E[X_i{}^2] - (E[X_i])^2 = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12$

3つのサイコロの出た目の和$S = X_1 + X_2 + X_3$ について：

期待値　：$E[S] = 3 \times E[X_i] = 3 \times 7/2 = 21/2$

分散　：$V[S] = 3 \times V[X_i] = 3 \times 35/12 = 35/4$

よって，求める期待値，分散は，

期待値 $21/2$，分散 $35/4$

[ 3 ]

(1) $s(\mathrm{A}) = 2$, $s(\mathrm{B}) = 4$, $s(\mathrm{C}) = 3$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 初 期 状 態 | 9 | 0 | 0 |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{B})$ | 2 | 7 | 0 |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 2 | 4 | 3 |

(2) $p(\mathrm{A},\ \mathrm{C}) \oplus p(\mathrm{C},\mathrm{B}) \oplus p(\mathrm{A},\mathrm{C})$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 初 期 状 態 | 9 | 0 | 0 |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{C})$ | 6 | 0 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{B})$ | 6 | 3 | 0 |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{C})$ | 3 | 3 | 3 |

(3) $s(\mathrm{A}) = 9$, $s(\mathrm{B}) = 1$, $s(\mathrm{C}) = 0$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 初 期 状 態 | 10 | 0 | 0 |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{B})$ | 3 | 7 | 0 |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 3 | 4 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{A})$ | 6 | 4 | 0 |
| ~~$p(\mathrm{A},\mathrm{B})$~~ | ~~3~~ | ~~7~~ | ~~0~~ |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 6 | 1 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{A})$ | 9 | 1 | 0 |

(4) 手続き $X$ の実行回数は4回，手続き $p$ の実行回数は9回

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 初期状態 | 10 | 0 | 0 |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{B})$ | 3 | 7 | 0 |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 3 | 4 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{A})$ | 6 | 4 | 0 |
| ~~p(A,B)~~ | ~~3~~ | ~~7~~ | ~~0~~ |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 6 | 1 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{A})$ | 9 | 1 | 0 |
| ~~p(A,B)~~ | ~~3~~ | ~~7~~ | ~~0~~ |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 9 | 0 | 1 |
| ~~p(C,A)~~ | ~~10~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| $p(\mathrm{A},\mathrm{B})$ | 2 | 7 | 1 |
| $p(\mathrm{B},\mathrm{C})$ | 2 | 5 | 3 |
| $p(\mathrm{C},\mathrm{A})$ | 5 | 5 | 0 |