令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程（第２次募集）
入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（電気・電子情報工学専攻）

［１］解答例

(1) 直接極限をとると，0/0となるため，

$$t = x - \frac{3}{2}\pi \text{ とおけば，} x \to \frac{3}{2}\pi \text{ のとき } t \to 0 \text{ である。}$$

これより，極限値を求めれば次の通りとなる。

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \frac{2x - 3\pi}{\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\cos(t + \frac{3}{2}\pi)} = 2\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 2\cdot 1 = 2$$

(2) $f(x,y)$の一次偏導関数を求めれば，次の通りである。

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\log(e^x + e^y) = \frac{e^x}{e^x + e^y}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\log(e^x + e^y) = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

それらの和をとれば

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1$$

となり，等式を満たす。

(3) 部分積分により，定積分を求めれば次の通りである。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, \mathrm{d}x = 2\left\{\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, \mathrm{d}x\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = 2\left\{\frac{\pi}{2} - 1\right\} = \pi - 2$$

(4) 重積分を極座標変換により計算するために，積分領域の表現を変更する。

領域D：$0 \leqq x,\quad x^2 + y^2 \leqq 1$　は，極座標で次のように表現できる。

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq r \leqq 1$$

上記の範囲で順次積分を行う。極座標変換において，

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = |r|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

であるため，

$$\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\; r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = I$$

と表現できる。$r=\sqrt{1-t^2}$ として置換積分を行う。

このとき，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

である。また，積分範囲は，$r=0\to t=1,\ r=1\to t=0$ である。式変形を行い，重積分を行えば，

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^0(1-t^2)\,t\,\sqrt{1-t^2}\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t = \pi\int_1^0(t^2-1)\,t^2\,\mathrm{d}t = \pi\int_1^0(t^4-t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = \frac{2}{15}\pi$$

となる。

［２］

(1)

ア．$|A| = 1-(-6+4)-(2)(4-4)+3(-2+3) = 1$

イ．$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

ウ．$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

$x=3,\quad y=4,\quad z=2$

(2)

ア．$|\lambda I - A| = (\lambda-4)(\lambda-1)-(-2)(1) = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 2$ ，$\lambda_2 = 3$

イ．$\lambda_1 = 2$に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ は

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\ ,\ 2x+y=0\ ,\ \boldsymbol{p}_1 = c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=3$に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ は

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\ ,\ x+y=0\ ,\ \boldsymbol{p}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

ただし，$c_1\neq 0,\ c_2\neq 0$ で任意の実数

ウ．$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ ，$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ または，$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ，$D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

エ．$A^n=PD^nP^{-1}$

$|P|=-1-(-2)=1$ ，$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 3^n\\ -2\cdot 2^n & -3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3^n-2^n & 3^n-2^n\\ 2\cdot 2^n-2\cdot 3^n & 2\cdot 2^n-3^n\end{pmatrix}$$

（ウで求めた後者のPとDを用いて計算しても答えは等しくなる）

［３］

(1) 求める平方根を $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ とおく。

$$w^2=\rho^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\rho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ より

$\rho=\sqrt{2}$，$2\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\,(n$：整数）より $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+n\pi\,(n$：0，1）となるので

$$w_n=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)\right)\quad (n：0,\ 1)$$

と書ける。よって求める平方根は

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad w_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

となる。

(2) $z=x+yi$，$\bar{z}=x-yi$ より $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ と表される。

これを $f(z)=(2x^2-2y)-i(2xy-2x)$ に代入して整理すると，

$$f(z)=\left\{2\cdot\frac{(z+\bar{z})^2}{4}-2\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}\right\}-i\left\{2\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}-2\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}\right\}$$

$$=\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{2}+i(z-\bar{z})-\frac{z^2-\bar{z}^2}{2}+i(z+\bar{z})=z\bar{z}+\bar{z}^2+2iz$$

となる。

(3)　$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ となる。$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，　$v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ とおくと，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ となる。$x=y=0$にてこれらの偏導関数は有限の値を取らず発散するが，$x=y=0$ すなわち$z=0$を除けば，コーシー・リーマンの方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を満たす。よって，$f(z)$は$z=0$以外で正則である。導関数は，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2+2xyi}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-(x-yi)^2}{(x+yi)^2(x-yi)^2}=-\frac{1}{(x+yi)^2}=-\frac{1}{z^2}\quad(z\neq 0)$$

で与えられる。

(4)

ア．$f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z^2-z-2)}=\dfrac{z^2}{(z+1)^2(z-2)}$ の特異点は $z=-1$，$z=2$ であり，前者は2位の極，後者は1位の極である。留数は

$$\mathrm{Res}[-1]=\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+1)^2f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2}{z-2}=\lim_{z\to-1}\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\frac{5}{9}$$

$$\mathrm{Res}[2]=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to2}\frac{z^2}{(z+1)^2}=\frac{4}{9}$$

となる。

イ．$|z|=3$の円の内側に，アで求めた特異点双方とも含まれるので，留数定理より

$$I=2\pi i\cdot\{\mathrm{Res}[-1]+\mathrm{Res}[2]\}=2\pi i\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\right)=2\pi i$$

となる。