令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（機械工学専攻）

［１］

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y}{x^3+3y^4}$$

$(x^3+3y^4)dy = (3x^2y)dx$

$(3x^2y)dx - (x^3+3y^4)dy = 0$

よって，

$\boxed{\text{A}}$ ： $3x^2y$

$\boxed{\text{B}}$ ： x^3+3y^4

(2)

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{-(x^3+3y^4)\} = -3x^2$$

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) \neq \frac{\partial}{\partial x}\{-(x^3+3y^4)\}$ より，完全微分方程式でない。

(3)

$(3x^2y)dx - (x^3+3y^4)dy = 0$

$x^2(3ydx - xdy) - 3y^4dy = 0$

両辺に，y^{-2}をかけると，

$x^2y^{-2}(3ydx - xdy) - 3y^2dy = 0$

以上より，

$\boxed{\text{ア}}$ ： $3ydx - xdy$

$\boxed{\text{イ}}$ ： $3y^4$

$\boxed{\text{ウ}}$ ： y^{-2}

$\boxed{\text{エ}}$ ： x^2y^{-2}

$\boxed{\text{オ}}$ ： $3y^2$

(4)

$x^2y^{-2}(3ydx - xdy) - 3y^2dy = 0$ より，

$x^2y^{-2}(3ydx - xdy) = 3y^2dy$

左辺$=x^2y^{-2}(3ydx - xdy) = (3x^2y^{-1}dx - x^3y^{-2}dy) = dF$とする

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{-1}) = -3x^2y^{-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^3y^{-2}) = -3x^2y^{-2}$$

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^3y^{-2})$ が成り立つ。

dFについて，

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^{-1}$ ・・・ ①

$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^3y^{-2}$ ・・・ ②

なので，①の両辺を積分して，

$F = \int 3x^2y^{-1}dx + h(y) = x^3y^{-1} + h(y)$

（ここで，$h(y)$はyの関数）

②より，

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^{-1} + h(y)) = -x^3y^{-2}$

$-x^3y^{-2} + h'(y) = -x^3y^{-2}$

$h'(y) = 0$

両辺積分して，

$h(y) = c_1$

（こでc_1は任意の定数）

したがって，

$F = x^3y^{-1} + c_1$

である。よって，

左辺$= dF = d(x^3y^{-1} + c_1)$

微分方程式は，

$d(x^3y^{-1} + c_1) = 3y^2dy$

となり，両辺積分して，

$x^3y^{-1} + c_1 = \int 3y^2dy + c_2$

$x^3y^{-1} + c_1 = y^3 + c_2$

（ここでc_2は任意の定数）

$y^3 - x^3y^{-1} = c_2 - c_1$

一般解は，$y^3 - x^3y^{-1} = c$

（ここでcは任意の定数）

【別解：②を積分した場合】

$x^2y^{-2}(3ydx - xdy) - 3y^2dy = 0$ より，

$x^2y^{-2}(3ydx - xdy) = 3y^2dy$

左辺$= x^2y^{-2}(3ydx - xdy) = (3x^2y^{-1}dx - x^3y^{-2}dy) = dF$とする

ここで，

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{-1}) = -3x^2y^{-2}$

$\frac{\partial}{\partial x}(-x^3y^{-2}) = -3x^2y^{-2}$

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x}(-x^3y^{-2})$ が成り立つ。

dFについて，

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^{-1}$　・・・　①

$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^3y^{-2}$　・・・　②

なので，②の両辺を積分して，

$F = \int -x^3y^{-2}dy + h(x) = x^3y^{-1} + h(x)$

（ここで，$h(x)$はxの関数）

①より，

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^{-1} + h(x)) = 3x^2y^{-1}$

$3x^2y^{-1} + h'(x) = 3x^2y^{-1}$

$h'(x) = 0$

両辺積分して，

$h(x) = c_1$

（ここでc_1は任意の定数）

したがって，

$F = x^3y^{-1} + c_1$

である。よって，

左辺$= dF = d(x^3y^{-1} + c_1)$

微分方程式は，

$d(x^3y^{-1} + c_1) = 3y^2dy$

となり，両辺積分して，

$x^3y^{-1} + c_1 = \int 3y^2dy + c_2$

$x^3y^{-1} + c_1 = y^3 + c_2$

（ここでc_2は任意の定数）

$y^3 - x^3y^{-1} = c_2 - c_1$

一般解は，$y^3 - x^3y^{-1} = c$

（ここでcは任意の定数）

[2]

(1)

$a-6$

(2)

$a\neq 6$のときA^{-1}が存在して，Xが一意に定まる。このとき，

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{a-6}\begin{bmatrix}a & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ c\end{bmatrix}=\frac{1}{a-6}\begin{bmatrix}ab-3c\\ -2b+c\end{bmatrix}$$

(3)

行列Aが正則でないことが条件となるので，(1)より，$a=6$

$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}X_0=O$　より，$X_0=h\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$，$h$は0でない任意の実数

(4)

Aの階数と行列$[A\quad B]$の階数が等しいことが条件となるので，$2b=c$

このとき，$AX_1=B$の特殊解の一つは，$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}X_1=\begin{bmatrix}b\\ 2b\end{bmatrix}$より$X_1=\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}$

よって，$X_1=\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}+X_0=\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$，$k$は任意の実数

［３］

(1)

ア． $5e^{2i}=5\cos 2+5i\sin 2$

イ． $-3+\sqrt{3}\,i=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ よって，絶対値は$2\sqrt{3}$，偏角の主値は$\frac{5\pi}{6}$。

(2)

ア． $(z+1)(z^2+2z+101)=0$を解けばよい。よって，特異点は$z=-1,-1\pm 10i$。

イ． $e^{-z}+e^{z}=0$を解けばよい。これにe^zを乗じ，$e^{2z}=-1$を得る。$-1=e^{\pm(2n-1)\pi i}$ $(n=1,2,3,\ldots)$と表せることから，零点は$z=\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}i\ (n=1,2,3,\ldots)$。

（別解） $e^{-z}+e^{z}=e^{-x}(\cos(y)-i\sin(y))+e^{x}(\cos(y)+i\sin(y))=(e^{-x}+e^{x})\cos(y)+i(-e^{-x}+e^{x})\sin(y)$ （ここでx，yは実数）と変形できる。つまり，$e^{-z}+e^{z}=0$となるx，yは$\cos(y)=0$かつ$-e^{-x}+e^{x}=0$を満足する必要がある。このとき$x=0$，$y=\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}\ (n=1,2,3,\ldots)$であるので，零点は$z=\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}i\ (n=1,2,3,\ldots)$ 。

(3)

ア． $z^2+1=0$を解き，特異点は2つの単純極$z=\pm i$である。$\frac{e^{-z}}{z^2+1}=\frac{e^{-z}}{(z+i)(z-i)}$と式変形できることに注意して，極$-i$の留数は $\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{e^{-z}}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-z}}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}\frac{e^{-z}}{z-i}=\frac{e^{i}}{-2i}=\frac{ie^{i}}{2}$，

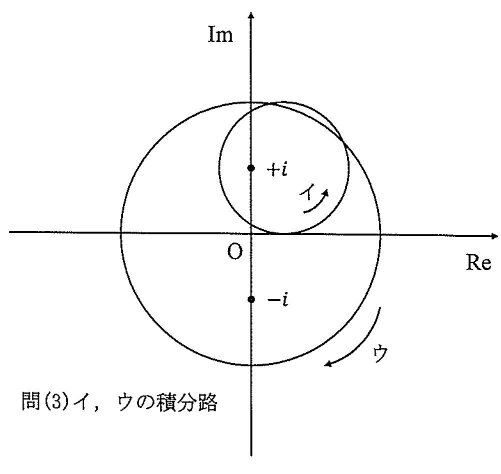
極$+i$の留数は$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{-z}}{z^2+1}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-z}}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{e^{-z}}{z+i}=\frac{e^{-i}}{2i}=-\frac{ie^{-i}}{2}$。

（別解）留数に関する別の公式$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ を使っても良い。

イ． この場合，ひとつの極$+i$が円の内部にある（極$-i$は円の外にある）。そのため，留数定理より積分の値は

$2\pi i\cdot\left(-\frac{ie^{-i}}{2}\right)=\pi e^{-i}$。

ウ． この場合，極が二つとも円の内部にある。もし積分路が反時計回りなら，留数定理より積分の値は$2\pi i\cdot\left(\frac{ie^{i}}{2}-\frac{ie^{-i}}{2}\right)=-2\pi i\sin 1$となる。問題は時計回りであるため符号が逆になり，積分の値は$2\pi i\sin 1$となる。



問(3)イ，ウの積分路

[4]

(1)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mu e^{\mu t} - \lambda e^{\lambda t}}{\mu - \lambda} e^{-st}dt = \frac{1}{\mu - \lambda}\int_0^\infty \left(\mu e^{-(s-\mu)t} - \lambda e^{-(s-\lambda)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\left[-\frac{\mu}{s-\mu}e^{-(s-\mu)t}\right]_0^\infty - \left[-\frac{\lambda}{s-\lambda}e^{-(s-\lambda)t}\right]_0^\infty\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\left[\frac{\mu}{s-\mu}e^{-(s-\mu)t}\right]_\infty^0 - \left[\frac{\lambda}{s-\lambda}e^{-(s-\lambda)t}\right]_\infty^0\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\frac{\mu}{s-\mu} - \frac{\lambda}{s-\lambda}\right\} = \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\frac{\mu s - \mu\lambda - \lambda s + \mu\lambda}{(s-\mu)(s-\lambda)}\right\} = \frac{s}{(s-\mu)(s-\lambda)}$$

別解

公式

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

を用いて

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}\mathcal{L}\{e^{\mu t}\} - \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = \left(\frac{\mu}{\mu - \lambda}\frac{1}{s-\mu}\right) - \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\frac{1}{s-\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\frac{\mu}{s-\mu} - \frac{\lambda}{s-\lambda}\right\} = \frac{1}{\mu - \lambda}\left\{\frac{\mu s - \mu\lambda - \lambda s + \mu\lambda}{(s-\mu)(s-\lambda)}\right\} = \frac{s}{(s-\mu)(s-\lambda)}$$

(2)

$$\frac{4s^2 - 3s + 4}{s^3 - s^2 + 4s - 4} = \frac{4s^2 - 3s + 4}{(s-1)(s^2 + 2^2)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs + C}{(s^2 + 2^2)}$$

連立方程式を解いて，部分分数の係数を求めると $A = 1, B = 3, C = 0$

したがって，

$$\frac{4s^2 - 3s + 4}{s^3 - s^2 + 4s - 4} = \frac{1}{(s-1)} + \frac{3s}{(s^2 + 2^2)} = \mathcal{L}\{e^t\} + 3\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \mathcal{L}\{e^t + 3\cos(2t)\}$$

$\therefore f(t) = e^t + 3\cos(2t)$

(3)

ア.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}[\cos(t)]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi}$$

イ.

$n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\sin(2t)\,dt\right] = \frac{1}{4\pi}[\cos(2t)]_{-\pi}^{0} = 0$$

$n > 1$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\{\sin\left((1+n)t\right) + \sin\left((1-n)\,t\right)\}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\left((1+n)t\right) - \frac{1}{n-1}\cos\left((1-n)t\right)\right]_{-\pi}^{0}$$

$n = 3,5,7 \ldots$の場合

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\left((1+n)t\right) - \frac{1}{n-1}\cos\left((1-n)t\right)\right]_{-\pi}^{0} = 0$$

$n = 2,4,6 \ldots$の場合

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\left((1+n)t\right) - \frac{1}{n-1}\cos\left((1-n)t\right)\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2n-2-2n-2}{n^2-1}\right] = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2-1}\right]$$

これらをまとめると

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(2n)^2-1}\right] \qquad n = 1,2,3,4 \ldots$$

ウ．

$n=1$ のとき

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin(t)\sin(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin^2(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=-\frac{1}{2\pi}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{2}$$

$n>1$のとき

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin(t)\sin(nt)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\{\cos((1+n)t)-\cos((1-n)\,t)\}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\big((1+n)t\big)+\frac{1}{n-1}\sin\big((1-n)t\big)\right]_{-\pi}^{0}=0$$

エ．

$$f(t)=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)-\frac{1}{2}\sin(t)$$