令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（情報・知能工学専攻）

[1]

(1)　固有方程式$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$を解くと，$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)+2=(\lambda-3)(\lambda-2)=0$となり，$\lambda_1=3,\lambda_2=2$が得られる。$\boldsymbol{e_1}$は$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{0}$を満たすので$-2+c=0$，したがって$\boldsymbol{e_1}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$となる。同様に，$\boldsymbol{e_2}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$となる。

(2)　(1)より$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$である。逆行列は$\boldsymbol{P^{-1}}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$となる。したがって，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}$の形に対角化できる。

(3)　(2)より$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP^{-1}}$なので，与えられた微分方程式は$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{PDP^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$となる。この式の両辺に左から$\boldsymbol{P^{-1}}$を掛けると$\boldsymbol{P^{-1}}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}PDP^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$で，さらに$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{DP^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$となる。ここで$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$とおくと，$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$より，$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$となる。$\frac{d}{dt}y_1=3y_1$より$y_1=c_1e^{3t}$および$\frac{d}{dt}y_2=2y_2$より$y_2=c_2e^{2t}$とそれぞれ解ける($c_1,c_2$は任意定数)。$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$より$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{3t}\\c_2e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{3t}+c_2e^{2t}\\2c_1e^{3t}+c_2e^{2t}\end{bmatrix}$となる。$x_1(0)=2,x_2(0)=3$なので，$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2\\2c_1+c_2\end{bmatrix}$より$c_1=1,c_2=1$となる。したがって，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{3t}+e^{2t}\\2e^{3t}+e^{2t}\end{bmatrix}$となる。

(4)　$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$より$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{bmatrix}$と書ける。さらに，$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{bmatrix}a_{n-2}\\b_{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^{n-1}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$と書ける。ここで(2)で得られた$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$の両辺をそれぞれ$n$乗すると$(\boldsymbol{P^{-1}AP})^n=\begin{bmatrix}3^n & 0\\0 & 2^n\end{bmatrix}$となる。$(\boldsymbol{P^{-1}AP})^n=\boldsymbol{P^{-1}A^nP}$なので，

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}3^n & 0\\0 & 2^n\end{bmatrix}\boldsymbol{P^{-1}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^n & 0\\0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n\\2^{n+1}-2\cdot3^n & 2\cdot3^n-2^n\end{bmatrix}$$

となる。$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{n-1}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$より

$$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n-3^{n-1} & 3^{n-1}-2^{n-1}\\2^n-2\cdot3^{n-1} & 2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{n-1}\\2\cdot3^{n-1}\end{bmatrix}$$

となる。

[2]

(1)

ア. 袋 A から赤玉が出た場合は，すでに赤玉が 1 個出ているため，袋 B からは 2 個とも青玉が出る必要がある。一方，袋 A から白玉が出た場合は，袋 B から引く 1 個が赤玉である必要がある。

・袋 A から赤玉 ($\frac{4}{7}$) が出て，袋 B から 2 個とも青玉（順序無しで 2 個選ぶ：$\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{10}{21}$）が出る場合：

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{10}{21}=\frac{40}{147}$$

・袋 A から白玉 ($\frac{3}{7}$) が出て，袋 B から赤玉 ($\frac{2}{7}$) が出る場合：

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{49}$$

この 2 つの事象は互いに排反であるため，それぞれの確率を求めて加算する。

$$\frac{40}{147}+\frac{6}{49}=\frac{40+18}{147}=\frac{58}{147}$$

イ. 袋 A からは常に 1 個玉を引くため，全体の玉数は袋 B からの玉数に 1 を加えたものとなる。よって，引かれる玉の個数を表す確率変数 X とその確率は以下となる。

・袋 A から赤玉が出て，袋 B から 2 個玉を引く場合：$X=3$, 確率$\frac{4}{7}$

・袋 A から白玉が出て，袋 B から 1 個玉を引く場合：$X=2$, 確率$\frac{3}{7}$

このとき，期待値は，

$$E[X]=3\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{7}$$

また，

$$E[X^2]=9\cdot\frac{4}{7}+4\cdot\frac{3}{7}=\frac{48}{7}$$

より，分散は，

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{48}{7}-\frac{324}{49}=\frac{336-324}{49}=\frac{12}{49}$$

ウ. ベイズの定理により，

$$P(\text{袋 Aから白}\mid\text{袋 Bからすべて青})$$

$$=\frac{P(\text{袋 Bからすべて青}\mid\text{袋 Aから白})\cdot P(\text{袋 Aから白})}{P(\text{袋 Bからすべて青})}$$

また，

$$P(\text{袋 A から白}) = \frac{3}{7}$$

$$P(\text{袋 A から赤}) = \frac{4}{7}$$

袋 A に対する各事象について考えると，

・袋 A から白玉が出た場合は，袋 B から 1 個引く（青玉が出る確率は $\frac{5}{7}$）

$$P(\text{袋 B からすべて青}|\text{袋 A から白}) = \frac{5}{7}$$

・袋 A から赤玉が出た場合は，袋 B から 2 個引く

$$P(\text{袋 B からすべて青}|\text{袋 A から赤}) = P(\text{2 個青が出る}) = \frac{{}_5C_2}{{}_7C_2} = \frac{10}{21}$$

よって，

$$P(\text{袋 B からすべて青}) = P(\text{袋 A から白}) \cdot \frac{5}{7} + \mathrm{P}(\text{袋 A から赤}) \cdot \frac{10}{21}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{10}{21} = \frac{15}{49} + \frac{40}{147} = \frac{45+40}{147} = \frac{85}{147}$$

ベイズの定理で求めた式に代入し，

$$P(\text{袋 A から白}|\text{袋 B からすべて青}) = \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{85}{147}} = \frac{\frac{15}{49}}{\frac{85}{147}} = \frac{15}{49} \cdot \frac{147}{85} = \frac{15 \cdot 3}{85} = \frac{9}{17}$$

（2）

ア． 確率密度関数の定義より，全区間で積分して 1 になるので，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 ax(1-x)\,dx = 1$$

展開して計算，

$$\int_0^1 ax(1-x)\,dx = a\int_0^1 (x-x^2)\,dx = a\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = a \cdot \frac{1}{6}$$

したがって，

$$a \cdot \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow a = 6$$

イ． 求める確率は，

$$P(0.4 \le X \le 0.6) = \int_{0.4}^{0.6} 6x(1-x)dx = 6\int_{0.4}^{0.6} (x-x^2)dx = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0.4}^{0.6}$$

小数を分数にして計算

$$0.4 = \frac{2}{5}, 0.6 = \frac{3}{5}$$

各項を計算：

上限 $x = 0.6 = \frac{3}{5}$

$$\frac{(3/5)^2}{2} - \frac{(3/5)^3}{3} = \frac{9/25}{2} - \frac{27/125}{3} = \frac{45-18}{250} = \frac{27}{250}$$

下限 $x = 0.4 = \frac{2}{5}$

$$\frac{(2/5)^2}{2} - \frac{(2/5)^3}{3} = \frac{4/25}{2} - \frac{8/125}{3} = \frac{30-8}{375} = \frac{22}{375}$$

上限と下限の差を取り

$$\frac{27}{250} - \frac{22}{375} = \frac{81-44}{750} = \frac{37}{750}$$

元の式の係数 6 をかけて

$$6 \cdot \frac{37}{750} = \frac{37}{125}$$

よって

$$P(0.4 \leq X \leq 0.6) = \frac{37}{125}$$

［３］

(1)

ア　⑥	イ　⑤	ウ　①	エ　⑩
オ　⑮	カ　⑬	キ　⑭	ク　⑧

(2)

(b)

(3)

ケ　３６	コ　$d_i + 1$	サ　$\sum_{i=1}^{N} d_i + 1$

(4)

`(*root)`

(5)

シ　⑱	ス　⑰