令和８年度　大学院工学研究科博士前期課程入学者選抜学力検査問題解答例

基礎科目（電気・電子情報工学専攻）

[1]

(1) 直接極限をとると，0/0となるため

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x \cos x}{x^3} = \lim_{x \to 0} f(x)$$

とおいて，$f(x)$の式変形を行う。

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x\,(1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \{1 - (1 - \sin^2 x)\}}{x^3 \cos x} = \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

これより，極限値は，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

となる。

(2)

ア．関数 $f(x,\ y)$の全微分を行えば

$$\mathrm{d}f = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y = 3x^2y^4\mathrm{d}x + 4x^3y^3\mathrm{d}y$$

となる。

イ．題意および前問より，$\mathrm{d}f \approx \Delta f$の近似式が成り立つ。$x = 2$, $\mathrm{d}x = 0.02$, $y = 2$, $\mathrm{d}y = -0.01$をアの結果に代入して，微小変化量を計算すれば，

$$\mathrm{d}f \approx \Delta f = 3x^2y^4\mathrm{d}x + 4x^3y^3\mathrm{d}y = 3 \times 2^2 \times 2^4 \times 0.02 - 4 \times 2^3 \times 2^3 \times 0.01$$

$$= 2^6(3 \times 0.02 - 4 \times 0.01) = 2^7 \times 0.01$$

となる。よって，$f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) = 2.02^3 \times 1.99^4$の近似値は，

$$f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) \approx f(x, y) + \mathrm{d}f = x^3y^4 + \mathrm{d}f = 2^3 \times 2^4 + 2^7 \times 0.01 = 128 + 1.28 \approx 129$$

となる。

(3) 置換積分を行うために，$\sqrt{x}=y$ とおくと，$x=y^2$ となる。このとき，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 2y \rightarrow \mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$ となる。また，積分範囲は，$0 \leqq x \leqq 1 \rightarrow 0 \leqq y \leqq 1$であるため，

$$\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2y\,\log(1+y)\,\mathrm{d}y$$

を解けばよい。部分積分を行い，式変形を行なって定積分を求めると，

$$\int_0^1 2y\,\log(1+y)\,\mathrm{d}y = [y^2\log(1+y)]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y}\mathrm{d}y = \log 2 - \int_0^1 \frac{(y+1)(y-1)+1}{y+1}\mathrm{d}y$$

$$= \log 2 - \int_0^1 \left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y = \log 2 - \left[\frac{y^2}{2} - y + \log(y+1)\right]_0^1 = \log 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \log 2\right) = \frac{1}{2}$$

となる。

(4) 逐次積分を行うために，領域Dより，変数x, yの積分範囲を決定する。

領域：Dより，

$$y \leqq \frac{\pi}{2} - x$$

であり，$0 \leqq y$より，

$$0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} - x$$

となる。これを満たすxの条件は，$0 \leqq x$であることを考慮して，

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

である。上記の範囲で順次積分を行えば，

$$\iint_D \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right\}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

となる。

［２］

（1）

ア． $X = AB - 2A$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

イ． $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0$ より

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \quad (\lambda_1 > \lambda_2)$

ウ． $\lambda_1 = 2$に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$は

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad y = 0, \quad \boldsymbol{p}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2$は

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad y = -x, \quad \boldsymbol{p}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ただし， $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ で任意の数

（2）

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$V_1 = 7\,\mathrm{V}, \quad V_2 = 9\,\mathrm{V}, \quad V_3 = 10\,\mathrm{V}$

[3]

(1)

ア． $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5=\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}\right)^5=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^5=i^5=i$

イ． $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{-5}=\left(2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^{-5}=\dfrac{1}{32}e^{-\frac{5\pi}{3}i}=\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{1}{64}+\dfrac{\sqrt{3}}{64}i$

(2)

ア． $f(z)=|z|^2=\left(x^2+y^2\right)+0i$ となる。$u=\left(x^2+y^2\right)$，$v=0$ とおくと，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ となる。$z=0\ (x=y=0)$ の点で，コーシー・リーマンの方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を満たすが，その他では満たさない。よって，$f(z)$ は $z=0\ (x=y=0)$ でのみ微分可能だが，正則ではない。

イ． $f(z)=e^{2z}=e^{2(x+iy)}=e^{2x}\left(\cos 2y+i\sin 2y\right)$ となる。$u=e^{2x}\cos 2y$，$v=e^{2x}\sin 2y$ とおくと，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ となり，複素平面全域でコーシー・リーマンの方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を満たす。よって，$f(z)$ は正則である。

導関数は，$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\sin 2y=2e^{2x}e^{2iy}=2e^{2(x+iy)}=2e^{2z}$

(3)

ア． $f(z)=\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}iz}}{z^2-4z+3}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}iz}}{(z-1)(z-3)}$ の特異点は $z=1$，$z=3$ で共に1位の極。留数は，

$\mathrm{Res}[1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=-\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$，$\mathrm{Res}[3]=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\dfrac{e^{\pi i}}{2}=-\dfrac{1}{2}$ となる。

イ．$|z|=2$の円の内側にある特異点は$z=1$のみなので，留数定理より

$$I=2\pi i\ \mathrm{Res}[1]=-\frac{2\pi i\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\frac{\pi\left(\sqrt{3}-i\right)}{2}$$