

令和 8 年度 豊橋技術科学大学第 3 年次入学者選抜学力検査問題解答例

応 用 数 学

[1]

(1)

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + b^3 - ab^2 - ab^2 - ab^2 = a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2(a+2b)$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

したがって、逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3) (1) より,

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3)$$

したがって、 B の固有値は $\lambda = 0, 3$ である。さらに、 $\lambda = 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((c_1, c_2) \neq (0, 0))$$

また、 $\lambda = 3$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

[2]

(1)

ア.

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2y, \quad f_y(x, y) = -2x + 2y$$

イ. $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ が成立するのは, アより, $(x, y) = (0, 0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ である.
また,

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = -2, \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

より,

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

とおくと,

$$H(x, y) = 12x - 4$$

である。

$H(0, 0) = -4 < 0$ より, $(x, y) = (0, 0)$ で極値をとらない。

$H(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 4 > 0, f_{xx}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 4 > 0$ より, $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ で極小値 $-\frac{4}{27}$ をとる。

ウ. アより, 陰関数定理を用いると,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{-2x + 2y}{3x^2 - 2y}$$

であり, これに $(x, y) = (1, 1)$ を代入すると, 0 である。したがって, 曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 $(1, 1)$ における接線の方程式は $x - 1 = 0(y - 1)$, つまり,

$$x = 1$$

である。

(2)

ア.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

イ. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ より, 積分の順序を入れ換えると,

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e - 1}{2}$$

[3]

(1) ア. 表が4回, 裏が1回なので, 求める確率は

$${}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

イ. 表が0回である確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, 表がちょうど1回である確率はアで求めた確率と同じであるから, $\frac{5}{32}$ である。したがって, 余事象を考えると, 求める確率は

$$1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} = \frac{13}{16}$$

ウ. 4回目までに表が3回, 裏が1回出て, 5回目に表が出ればいいので, 求める確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

エ. $p_n = \left(1 - \frac{5}{2n}\right)^n$ であり,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-5}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{2n-5}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{5}n-1}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{2}{5}n-1}\right)^{\frac{2}{5}n-1} \right\}^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

(2)

ア.

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} e^{-\frac{1}{2}t^2} - tv(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

であるので,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} e^{\frac{1}{2}t^2} + tv(t)$$

を得る。これを問題の微分方程式に代入し, 整理すると,

$$\frac{du(t)}{dt} = \log t$$

イ. アより,

$$u(t) = \int \log t dt = t \log t - \int dt = t \log t - t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。したがって, $v(t) = (t \log t - t + C)e^{\frac{1}{2}t^2}$ である。そして, $v(1) = 0$ より, 求める解は

$$v(t) = (t \log t - t + 1)e^{\frac{1}{2}t^2}$$