令和８年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題

数　　　学

注 意 事 項

1　試験開始の合図まで，問題冊子を開いてはいけません。

2　問題冊子の枚数は，表紙，白紙を含めて７枚です。

3　問題は４問あります。全問解答してください。

4　解答用紙が６枚と計算用紙が１枚あります。
試験開始の合図の後すぐに，すべての解答用紙と計算用紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。

5　解答は解答用紙の所定の欄に記入してください。解答を裏面に記入してはいけません。

6　解答は，必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。

7　落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあれば，ただちに申し出てください。

8　試験終了時刻まで退出してはいけません。

9　問題冊子は持ち帰ってください。

このページは白紙です。

［１］　自然数の定数pに対して，1からnまでの自然数のp乗の和を

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

とおく。太郎さんと花子さんは，次の３つの等式について話している。

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad ①$$

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad ②$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \qquad ③$$

太郎：$S_1(n)$は初項1，末項n，項数nの等差数列の和とみなせるから，等差数列の和の公式を用いると等式①は示せるよね。でも，等式②や③はどうして成り立つんだろう。

花子：数学的帰納法を用いたらどうだろう。

太郎：確かに等式が成り立つことは示せそうだね。でも，等式②や③の右辺はどうやって求めたんだろう。

花子：じゃあ，実際に等式①がわかっているとして，等式②の右辺を求めてみよう。まずは，恒等式

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

を利用すればいいんだよ。この恒等式に$x = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$と順に代入して得られる$n$個の等式を辺々加えると，

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n$$

が成り立つよね。その後に，等式①を代入して，式を整理すると，

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が得られるね。

太郎：それだと，等式①と②を用いれば，等式③の右辺を求めることができそうだし，等式①，②，③を用いれば，$S_4(n)$も求めることができそうだね。

以下の問いに答えよ。

(1)　次の和を求めよ。必要ならば，等式①，②，③を用いてもよい。

ア．

$$\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$$

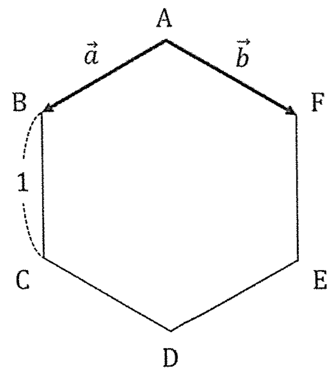
イ．

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3$$

(2)　数学的帰納法によって，等式②を証明せよ。

(3)　和$S_4(n)$を求めよ。必要ならば，等式①，②，③を用いてもよい。ただし，答えは式を展開して，nについての降べきの順に整理して答えよ。

［2］　1辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて，線分CDを1:2に内分する点をPとする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$とする。以下の問いに答えよ。



(1)　内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の大きさを求めよ。

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$のなす角を$\theta$とするとき，$\sin\theta$の値を求めよ。

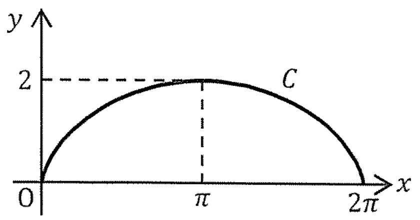
(6)　△ABPの面積Sを求めよ。

［３］　$f(t)=t-\sin t$，$g(t)=1-\cos t$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{d}{dt}f(t)$，$\dfrac{d}{dt}g(t)$をそれぞれ求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt$ を求めよ。

(3)　媒介変数表示　$x=f(t),\ y=g(t)\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$で表される$xy$平面上の曲線を$C$とする。



ア．$0<a<2\pi$とする。曲線C上の点$(a-\sin a,\ 1-\cos a)$における法線の方程式を求めよ。

イ．曲線Cとx軸で囲まれた部分をx軸の周りに1回転させてできる立体の体積Vを求めよ。

［4］　n を 3 以上の自然数とする。n人がじゃんけんを 1 回する。このとき，勝つ人数の期待値を E_n とする。ただし，だれも勝たないときは，勝つ人数は 0 人とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき，1 人が勝つ確率を求めよ。

(2)　$n=5$ のとき，2 人が勝つ確率を求めよ。

(3)　$n=5$ のとき，だれも勝たない確率を求めよ。

(4)　期待値 E_5 を求めよ。

(5)　等式 $2^{n-1}-1=\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-1}C_k$ が成り立つことを証明せよ。

(6)　極限 $\lim_{n\to\infty}E_n$ を求めよ。必要ならば，以下の(i)，(ii) が成り立つことを用いてもよい。

(i) $k\times{}_nC_k=n\times{}_{n-1}C_{k-1}$ ただし，$1\leqq k\leqq n$

(ii) $r>1$のとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r^n}=0$