令和８年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　学

[1]

(1)

ア.

初項a, 末項l, 項数nの等差数列の和をS_nとすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

である。これより次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{10}(3k-2) = \frac{10\cdot(1+28)}{2} = 145$$

イ.

③より次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3 = \sum_{k=2}^{11}k^3 = \left(\sum_{k=1}^{11}k^3\right) - 1^3 = \frac{11^2\cdot 12^2}{4} - 1 = 4355$$

(2)

$n=1$ のとき, 等式②の右辺は,

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 1$$

となる。一方, $S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$と定義されており, $S_2(1) = 1^2 = 1$である。したがって, $n=1$のとき等式②が成り立つ。

次に, $n=k$のとき等式②が成り立つと仮定する。すなわち,

$$S_2(k) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

が成り立つとする。上式の両辺に$(k+1)^2$を加えると,

$$S_2(k) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

となる。左辺は$S_2(k+1)$であるため,

$$S_2(k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

である。このことは, $n=k+1$ のときにも等式②が成り立つことを示している。数学的帰納法により, 全ての自然数nについて等式②が成り立つことが示された。

(3)

$(x+1)^5-x^5=5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$ であり，$x=1,\ 2,\ 3,\cdots,n$ と順に代入して得られる n 個の等式を辺々加えると，

$$(n+1)^5-1^5=5S_4(n)+10S_3(n)+10S_2(n)+5S_1(n)+n$$

が成り立つ。等式①，②，③を用いると，

$$(n+1)^5-1=5S_4(n)+\frac{5}{2}n^2(n+1)^2+\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)+n$$

となる。これを n についての降べきの順に整理すると，

$$S_4(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

となる。

［ 2 ］

(1)
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

(2)　線分ADと線分BEの交点をOとする。このとき，四角形ABOFは平行四辺形であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \vec{a} + \vec{b}$$

であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

である。また，四角形ABCOも平行四辺形であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \vec{a} + \vec{b}$$

であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

である。

(3)　点Pは辺CDを1: 2に内分する点であるので，(2)の結果を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3} = 2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$

である。

(4)　(1)と(3)より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = \left(2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right) = 4|\vec{a}|^2 + \frac{16}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{28}{9}$$

であるので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

である。

(5)　(1)と(3)より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right)=2|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{4}{3}$$

である。一方で，(4)より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cos\theta=\frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\theta$$

である。したがって,

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

であり，$0°\leqq\theta\leqq180°$より,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

(6)

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

［３］

(1)

$$\frac{d}{dt}f(t) = 1 - \cos t \ , \ \frac{d}{dt}g(t) = \sin t$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t \, dt,$$

$\sin t = x$ とおくと，$\cos t \, dt = dx$ であり，t が 0 から $\frac{\pi}{2}$ に変化すると，x は 0 から 1 に変化するので，置換積分法によって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt = \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である。

(3) ア．(1)より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

である。したがって，求める法線の方程式は，$a \neq \pi$ のとき，

$$y = -\frac{1 - \cos a}{\sin a}\{x - (a - \sin a)\} + 1 - \cos a = -\frac{1 - \cos a}{\sin a}(x - a)$$

$a = \pi$ のとき，

$$x = \pi$$

である。

イ． $dx=(1-\cos t)\,dt$ であり，x が 0 から 2π に変化すると，t は 0 から 2π に変化するので，置換積分法によって，

$$V=\pi\int_0^{2\pi}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

となり，

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi\ ,\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{2\pi}=0\ ,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

であることと，(2)の積分範囲を 0 から 2π にすると，

$$\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=0$$

であることから，

$$V=5\pi^2$$

である。

［4］

(1)　5人がじゃんけんをして，1人が勝つ確率は，5人のうちどの1人が何を出して勝つかということなので，

$$\frac{{}_5C_1 \times 3}{3^5} = \frac{5}{81}$$

(2)　(1)と同様に考えると，5人がじゃんけんをして，2人が勝つ確率は，

$$\frac{{}_5C_2 \times 3}{3^5} = \frac{10}{81}$$

(3)　5人がじゃんけんをして3人が勝つ確率と，5人がじゃんけんをして4人が勝つ確率は，それぞれ(2)と(1)で求めた確率と同じであるので，3人が勝つ確率は$\frac{10}{81}$，4人が勝つ確率は$\frac{5}{81}$である。だれも勝たない事象は1人，2人，3人，4人が勝つ排反な事象の和事象の余事象であるので，だれも勝たない確率は，

$$1 - \left(\frac{5}{81} + \frac{10}{81} + \frac{10}{81} + \frac{5}{81}\right) = \frac{17}{27}$$

(4)　(1)から(3)より，

$$E_5 = 0 \times \frac{17}{27} + 1 \times \frac{5}{81} + 2 \times \frac{10}{81} + 3 \times \frac{10}{81} + 4 \times \frac{5}{81} = \frac{25}{27}$$

(5)　二項定理より，

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}C_k + 1$$

であるので，

$$2^{n-1} - 1 = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}C_k$$

(6)　n人がじゃんけんをして，k人（$1 \leqq k \leqq n-1$）が勝つ確率は

$$\frac{{}_nC_k \times 3}{3^n} = \frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

である。よって，

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \times {}_nC_k}{3^{n-1}}$$

また，(i)より

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \times {}_nC_k}{3^{n-1}} = \frac{n}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} = \frac{n}{3^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}C_k$$

および，(5)より

$$\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}C_k = 2^{n-1} - 1$$

が成り立つことから，

$$E_n = \frac{n}{3^{n-1}}(2^{n-1} - 1) = \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} - \frac{n}{3^{n-1}}$$

したがって，(ii)より

$$\lim_{n \to \infty} E_n = 0$$