令和７年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　　学

[1]

(1) 2次方程式の解の公式より，

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(2) (1)より，$p-q=\sqrt{5}$である。

また，解と係数の関係より，

$$p+q=1,\ \ pq=-1$$

したがって，

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(p^2-q^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(p+q)(p-q)=1$$

$$a_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(p^3-q^3)=\frac{1}{\sqrt{5}}(p-q)(p^2+pq+q^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(p-q)\{(p+q)^2-pq\}=2$$

(3) (1)より，$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(p-q)=1$である。したがって，

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}=1$$

であるので，$n=1$のときは成り立つ。b_kが正の有理数であるとする。

p,qは2次方程式$x^2-x-1=0$の解であるので，$p^{k+2}-p^{k+1}-p^k=0,\ q^{k+2}-q^{k+1}-q^k=0$

が成り立つことに注意すると，

$$b_{k+1}=\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}=\frac{p^{k+2}-q^{k+2}}{p^{k+1}-q^{k+1}}=\frac{p^{k+1}+p^k-(q^{k+1}+q^k)}{p^{k+1}-q^{k+1}}=1+\frac{p^k-q^k}{p^{k+1}-q^{k+1}}=1+\frac{a_k}{a_{k+1}}=1+\frac{1}{b_k}$$

が成り立つ。b_kが正の有理数であるので，b_{k+1}も正の有理数である。よって，数学的帰納法により，すべての自然数nについて，b_nが正の有理数である。

(4) $r>1$より，$h>0$を用いて，$r=1+h$とおくと，与えられた式より，

$$r^n=(1+h)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,h^k$$

が成り立つ。$h>0$であるので，

$$r^n = (1+h)^n \geqq 1 + nh$$

が成り立つ。$\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$であるので，$r > 1$のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$が成り立つ。

(5)　$r = 0$のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$である。したがって，$|r| < 1$で$r \neq 0$とすると，$|r|^{-1} > 1$であるので，(4)より，

$$\lim_{n\to\infty} |r|^{-n} = \infty$$

であることに注意すると，

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|r|^{-n}} = 0$$

が成り立つ。したがって，問題文にある結果より，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$が成り立つ。

(6)　$r = \frac{q}{p}$とおくと，$|r| < 1$であるので，(5)より，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$が成り立つ。したがって，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p^n - q^n} = \lim_{n\to\infty} p \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r^n} = p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

［2］

(1)　余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{5}$$

また，この結果を用いて，

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 6$$

(2)　(1)より，

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{24}{25}$$

である。

$0<\theta<\pi$より，

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

となる。よって，

$$S = \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta = 6\sqrt{6}$$

(3)　Dは辺BCを5：6に内分する点であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{6\vec{b}+5\vec{c}}{11}$$

(4)

$$\mathrm{BD} = \frac{5}{11}\mathrm{BC} = \frac{35}{11}$$

であるので，Iは線分ADをAB：BD = 11：7に内分する点である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{11}{18}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{18}\vec{c}$$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\vec{b}+t\vec{c}$ (s，tは実数)とおく。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$と(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \vec{b}\cdot\left(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c}\right) = s\left|\vec{b}\right|^2+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c} = 25s+6(t-1) = 0$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$と(1)より，$6(s-1)+36t=0$を得る。したがって，

$$25s+6t=6,\quad s+6t=1$$

これを解いて，

$$s = \frac{5}{24},\quad t = \frac{19}{144}$$

となる。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{5}{24}\vec{b}+\frac{19}{144}\vec{c}$$

[3]

(1) $\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{b}{1+x}=\dfrac{a+b+(a-b)x}{1-x^2}$ より， $a+b=1,\ a-b=0$ である。

したがって，$a=b=\dfrac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$，xが0から$\dfrac{\pi}{4}$ に変化するとtは0から$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に変化する。したがって，(1)より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

(3) 部分積分法によって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)'}{\cos x}dx=\left[\frac{\tan x}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\sin x}{\cos^2 x}dx=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$$
$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$$

したがって，

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$$

(2)より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

(4) $x=\tan\theta$とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，$x$が0から1に変化すると$\theta$は0から$\dfrac{\pi}{4}$ に変化する。したがって，

$$\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$$

(3)より，

$$\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

(5)

ア．$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，　$\dfrac{dy}{dt}=-\sin 2t$ より，

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 2t}=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}+(1-\cos^2 2t)}$$

$$=\sqrt{-\left(\cos 2t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

したがって，$|\vec{v}|$の最大値は $\dfrac{5}{4}$

イ．

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\sqrt{1+4\sin^2 t}\,dt$$

である。ここで，$x=2\sin t$とおくと，$dx=2\cos t\,dt$，tが0から$\dfrac{\pi}{6}$に変化するとxは0から1に変化する。したがって，

$$L=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$$

(4)より，

$$L=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

［４］

(1)

ア．3回の試行で起こりうる取り出し方の総数10^3通りのうち，$S=3$であるのは，取り出した玉に書かれた数字の組合せが，(0, 0, 3)，(0, 1, 2)，(1, 1, 1) のいずれかとなるときである。よって，$S=3$である確率は

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_1C_1 + {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 + {}_3C_3}{10^3} = \frac{1}{100}$$

イ．$S=9$である取り出し方の総数は，$a_1+a_2+a_3=9$となる$0 \leqq a_k \leqq 9$ $(k=1,2,3)$の選び方の総数と等しい。これは，異なる3個のものから重複を許して9個取る組合せの総数となるので，

$${}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

よって，$S=9$である確率は

$$\frac{55}{10^3} = \frac{11}{200}$$

(2)

ア．$n=1$のとき袋に入っている玉の数は全部で16個であり，袋から3個の玉を同時に取り出す場合の数は${}_{16}C_3$である。取り出した3個の玉がすべて異なる色となる場合の数は，白玉が1個取り出される場合の数${}_7C_1$，赤玉が1個取り出される場合の数${}_8C_1$，青玉が1個取り出される場合の数${}_1C_1$の積となる。

よって，求める確率は

$$p_1 = \frac{{}_7C_1 \times {}_8C_1 \times {}_1C_1}{{}_{16}C_3} = \frac{1}{10}$$

となる。

イ．玉の数は全部で$n+15$個であり，袋から3個の玉を同時に取り出す場合の数は${}_{n+15}C_3$である。取り出した3個の玉がすべて異なる色となる場合の数は，白玉が1個取り出される場合の数${}_7C_1$，赤玉が1個取り出される場合の数${}_8C_1$，青玉が1個取り出される場合の数${}_nC_1$の積となる。

$$p_n = \frac{{}_7C_1 \times {}_8C_1 \times {}_nC_1}{{}_{n+15}C_3} = \frac{7 \times 8 \times n}{\frac{(n+15)(n+14)(n+13)}{3 \times 2}} = \frac{336n}{(n+15)(n+14)(n+13)}$$

よって，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{336(n+1)}{(n+16)(n+15)(n+14)} \times \frac{(n+15)(n+14)(n+13)}{336n} = \frac{(n+1)(n+13)}{n(n+16)}$$

ウ．$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ となるnは，イ．より，$(n+1)(n+13) > n(n+16)$を解いて$n < \dfrac{13}{2}$ である。同様に，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ となるnは$n > \dfrac{13}{2}$ である。

したがって，

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < p_7 > p_8 > p_9 > p_{10} > \cdots$$

が成り立つので，p_nが最大となるのは $n = 7$ のときである。