令和６年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　　　学

［１］

(1) 操作を1回行うと，箱から2個取り出して残った玉の数は$6-2=4$，その後それと同じ個数を加えるので $a_1=4+4=8$

(2) a_n個の玉が入っている箱に対して，操作を1回行った後の箱に入っている玉の個数がa_{n+1}であるから，$a_{n+1}=2(a_n-2)=2a_n-4$

(3) (2)より，$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$ が得られるから，$a_n-4=2^{n-1}(a_1-4)$ となる。(1)より，$a_1=8$ だから，$a_n=2^{n-1}(8-4)+4=2^{n+1}+4$

(4) (3)より，$a_n=2^{n+1}+4>1000$ となる最小のnを求めると$n=9$ となる。

(5) 問題文より，

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$$

となる。$k=0,1,\cdots,n$ に対して ${}_nC_k>0$ であるから，$n\geqq 2$に対して

$$2^n\geqq {}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

が成り立つ。よって，$n\geqq 2$に対して

$$0\leqq b_n=\frac{n}{2^n}\leqq\frac{2}{n-1}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$$

だから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

(6) (3)より，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=4\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+4n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}+4n=4(2^n-1)+4n$$

(5)の結果より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(2^n-1)+4n}{2^n}=4$$

［２］

(1)2 点 A (0, −4, 6), B (−12, 4, 0) を直径の両端とすることから，球面Sの中心は A と B の中点である。よって，中心の座標は$(-6,\ 0,\ 3)$となる。

(2) (1)より，球面Sの半径をrとすると，その方程式は

$$(x+6)^2+y^2+(z-3)^2=r^2$$

となる。これは点 A を通るので，

$$r^2 = 6^2+(-4)^2+3^2=61$$

となる。よって，球面Sの方程式は$(x+6)^2+y^2+(z-3)^2=61$となる。

(3) yz平面は方程式$x=0$で表されるから，球面Sの方程式より

$$6^2+y^2+(z-3)^2=61$$

よって，球面Sがyz平面と交わってできる図形の方程式は

$$y^2+(z-3)^2=25 \text{ かつ } x=0$$

となる。

(4) (3)と同様にすると，C_1，C_3の方程式はそれぞれ，

$$(x+6)^2+y^2=52 \text{ かつ } z=0,\ (x+6)^2+(z-3)^2=61 \text{ かつ } y=0$$

となる。よって，P_1，P_2，P_3の座標はそれぞれ (−6, 0, 0)，(0, 0, 3)，(−6, 0, 3) となり，$\triangle P_1P_2P_3$の重心 G の座標は (−4, 0, 2) となる。

(5) (4)より，3 点 P_1，P_2，P_3の座標はそれぞれ (−6, 0, 0)，(0, 0, 3)，(−6, 0, 3) である。よって，$\triangle P_1P_2P_3$はzx平面上にある。また，その三角形の 3 辺 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1の長さはそれぞれ $3\sqrt{5}$，6，3 であるから，$\angle P_2P_3P_1=90^\circ$ となる。よって，$\triangle P_1P_2P_3$を底面とする四面体 $AP_1P_2P_3$の体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{2}\times 3\times 6=12$$

となる。

(6)$\overrightarrow{P_2R}=(0,\ r,\ r-3)$，$\overrightarrow{P_2A}=(0,\ -4,\ 3)$，$\overrightarrow{P_2P_1}=(-6,\ 0,\ -3)$に対して，

$$\overrightarrow{P_2R}=s\overrightarrow{P_2A}+t\overrightarrow{P_2P_1}$$

となる実数s，tが存在する。つまり，

$$(0,\ r,\ r-3)=(-6t,\ -4s,\ 3s-3t)$$

であるから，$s=-\frac{3}{7}$，$t=0$となり，$r=\frac{12}{7}$となる。

［3］

(1)　$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$

(2)　接線 l の方程式は$f'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$より，

$$y=\frac{1}{2e}\left(x-\sqrt{e}\right)+\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}x$$

となる。

(3)　$f'(x)=0$となるxは$x=e$であり，$0<x<e$ならば，$f'(x)>0$である。また，$x>e$ならば，$f'(x)<0$となる。よって，関数$y=f(x)$は$x=e$で極大値e^{-1}をもつ。

(4)　(1)より，

$$f''(x)=\frac{-x-2x(1-\log x)}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

$f''(x)=0$となるxは$x=e\sqrt{e}$であり，$0<x<e\sqrt{e}$ならば，$f''(x)<0$である。また，$x>e\sqrt{e}$ならば，$f''(x)>0$となる。
以上より，曲線$y=f(x)$は$0<x<e\sqrt{e}$で上に凸で，$x>e\sqrt{e}$で下に凸となり，変曲点は点$\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$である。

(5)　点$\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$をA，点$\left(\sqrt{e},\ 0\right)$をBとすると，求める面積$S$は△OABの面積$S_1$から，曲線$y=f(x)$と$x$軸および直線$x=\sqrt{e}$で囲まれた部分の面積$S_2$を引けばよい。よって，

$$S_1=\frac{1}{4}$$

であり，

$$S_2=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}}=\frac{1}{8}$$

であるので，

$$S=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

となる。

(6) $$V = \pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\log x)^2}{x^2} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{(\log x)^2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{(\log x)^2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + 2\pi \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + 2\pi \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{(\log x)^2}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + 2\pi \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + 2\pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= 2\pi - \frac{13}{4\sqrt{e}}\pi$$

［４］

(1) $N=3$ であるので，a_1, a_2, a_3 のうち2個が1で1個が3である事象の確率を求めればよい。よって，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{6^3}=\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$$

(2) $N=4$ となる事象は，a_1, a_2, a_3 のうち2個が1で1個が4である事象と，2個が2で1個が1である事象の和事象であり，これらの事象は互いに背反であるので，求める確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1}{6^3}=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$$

(3) N が3の倍数となるのは a_1, a_2, a_3 のうち少なくとも1つが3または6である。この事象の余事象は a_1, a_2, a_3 が全て1，2，4，5 のいずれかであるという事象である。よって，求める確率は

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{19}{27}$$

(4) N が4の倍数である事象は，a_1, a_2, a_3 がすべて偶数である事象，a_1, a_2, a_3 のうち2個が偶数で1個が奇数である事象，a_1, a_2, a_3 のうち1個が4で2個が奇数である事象という３つの事象の和事象であり，これらの事象は互いに背反である。よって，求める確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{3}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{3}{6}\right)^2=\left(\frac{3}{6}\right)^3+3\times\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{5}{8}$$

(5) N が3の倍数である事象をA, N が4の倍数である事象をBとする。このときN が12の倍数である事象は$A\cap B$ である。ここで，

$$P(A\cap B)=1-P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-\left\{P\left(\overline{A}\right)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right\}$$

であるので，$P\left(\overline{A}\right)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$を求めればよいことになる。$P\left(\overline{A}\right)$は(3)の事象の余事象であるから，

$$P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}$$

となる。$P\left(\overline{B}\right)$は(4)の事象の余事象であるから，

$$P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

となる。事象$\overline{A}\cap\overline{B}$は3の倍数でなく，4の倍数でもないという事象であるので，$\overline{A}\cap\overline{B}$は$a_1$, a_2, a_3 の全てが1または5である事象と，a_1, a_2, a_3 のうち1個が2で2個が1または5である事象との和事象であり，これらの事象は互いに背反である。よって，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{8}{216}+3\times\frac{4}{216}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

となる。以上より，求める確率は

$$P(A\cap B)=1-\frac{8}{27}-\frac{3}{8}+\frac{5}{54}=\frac{91}{216}$$

(6) N が4の倍数である事象をB, 3個の数 a_1, a_2, a_3 の少なくとも1個は奇数である事象をCとする。このとき，求める確率は条件付き確率$P_B(C)$であり，

$$P_B(C)=\frac{n(B\cap C)}{n(B)}$$

であるので，$n(B\cap C)$ と $n(B)$ を求めればよい。

まず(4)より，$n(B)=135$ である。さらに，事象$B\cap C$はa_1, a_2, a_3 のうち2個が偶数で1個が奇数である事象と，1個が4で2個が奇数である事象の和事象であり，これらの事象は互いに背反である。よって，

$$n(B\cap C)={}_3\mathrm{C}_1\times 3^3+{}_3\mathrm{C}_1\times 1\times 3^2=108$$

以上より，求める確率は

$$P_B(C)=\frac{n(B\cap C)}{n(B)}=\frac{108}{135}=\frac{4}{5}$$