令和６年度　豊橋技術科学大学第３年次入学者選抜学力検査問題解答例

応　用　数　学

[1]

(1) 求める座標は以下のように計算できる。

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{よって，} \ (-1, 6, 10)$$

(2) 固有方程式から，固有値 λ を計算する。

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1$$

$\lambda=0$ のとき，固有ベクトルは，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -1-0 & -2 & 0 \\ 2 & 3-0 & -1 \\ 2 & 2 & -2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-2y=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases} \therefore k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1 \neq 0)$$

$\lambda=-1$ のとき，固有ベクトルは，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -1-(-1) & -2 & 0 \\ 2 & 3-(-1) & -1 \\ 2 & 2 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y=0 \\ 2x+4y-z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \therefore k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k_2 \neq 0)$$

$\lambda=1$ のとき，固有ベクトルは，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -2 & 0 \\ 2 & 3-1 & -1 \\ 2 & 2 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases} \therefore k_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_3 \neq 0)$$

(3) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルと $\mathbf{0}$ ベクトルは変換の前後で変化しない。
よって，求める点の座標は $(c, -c, 0)$ である。ただし，c は任意定数。

［2］

(1)

ア．

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

イ．

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ウ．

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-2x^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad f_{yy}(x,y)=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

より

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

(2)

ア．

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(1-\cos^2 x\right)dx$$

となり，ここで$t=\cos x$とおいて置換積分をすると

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(t^2-1\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_{\frac{1}{2}}^{0}=\frac{11}{24}$$

イ．

$$\iint_D y\cos x\,dx\,dy=\int_0^1 y\,dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

ウ．

$$\iint_D e^{-x^2}\,dx\,dy=\int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^x dy=\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{1-e^{-1}}{2}=\frac{e-1}{2e}$$

［３］

（1） 取り出した球が赤玉である事象をX，取り出したカードの番号が 1 である事象をYとする。

ア．事象Xが起きる確率$P(X)$は，白玉 4 個と赤玉 1 個の合計 5 個の玉から赤玉を取り出す確率であるから，

$$P(X) = \frac{1}{5}$$

イ．事象Xが起きたときに事象Yが起きる条件付き確率$P(Y|X)$を求めれば良い。事象Xが起きると，1 から 3 までの番号がついている合計 3 枚のカードの中から 1 枚を取り出すので，

$$P(Y|X) = \frac{1}{3}$$

ウ．事象Yが起きる確率$P(Y)$は，事象Xが起きる場合と，事象Xが起きない場合に場合分けして考えると，

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$$

エ．事象Yが起こったときに事象Xが起きる条件付き確率$P(X|Y)$を求めれば良い。乗法定理より，

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1}{3}$$

（2）

ア．条件$v(0) = 0$より，$v(t) \neq \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}$であるとしてよいので，

$$\frac{-\mathrm{k}v'(t)}{\mathrm{mg} - \mathrm{k}v(t)} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$

より

$$\log|\mathrm{mg} - \mathrm{k}v(t)| = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}t + C$$

ただし，Cは任意定数である。よって，

$$v(t) = C_1 e^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}t} + \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}$$

ただし，C_1は 0 ではない任意定数である。条件$v(0) = 0$より，

$$v_1(t) = \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\left(1 - e^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}t}\right)$$

イ．

$$v_1'(t) = \mathrm{g}e^{-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}t}$$

より，$v_1'(0) = \mathrm{g}$となる。よって，求める接線の傾きはg

ウ．

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}$$