令和５年度　豊橋技術科学大学第３年次入学者選抜学力検査問題解答例

応　用　数　学

[1]

(1)　$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ より，$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ である。

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2 - 3A + 2E = 0$ である。すなわち，$A^2 = 3A - 2E$ である。両辺に A^{n-1} を乗じることにより，$A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ である。

(3) (2)より，$A^{n+1} = 3A^n - 2A^{n-1}$ が成り立ち，$\lambda_1 = 1$ であるから，

$$A^{n+1} - \lambda_1 A^n = A^{n+1} - A^n = 2(A^n - A^{n-1})$$

が成り立つ。この操作を n 回繰り返すことにより，

$$A^{n+1} - A^n = 2^n(A - E)$$

を得る。同様に，$\lambda_2 = 2$ であるから，

$$A^{n+1} - \lambda_2 A^n = A^{n+1} - 2A^n = A^n - 2A^{n-1} = \cdots = A - 2E$$

が成り立つ。以上より，$a_n = 2^n,\ b_n = -2^n,\ c_n = 1,\ d_n = -2$ となる。

(4) (3)より，$A^{n+1} - A^n = 2^n(A - E)$，$A^{n+1} - 2A^n = A - 2E$ が成り立つ。よって，

$$A^n = 2^n A - 2^n E - (A - 2E) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)E = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$ である。

［２］

(1)

ア．

$$f_x = 2\pi(2y^2+3y-2)\cos\big((2x+y)\pi\big) = 2\pi(2y-1)(y+2)\cos\big((2x+y)\pi\big)$$
$$f_y = (4y+3)\sin\big((2x+y)\pi\big) + \pi(2y^2+3y-2)\cos\big((2x+y)\pi\big)$$
$$= (4y+3)\sin\big((2x+y)\pi\big) + \pi(2y-1)(y+2)\cos\big((2x+y)\pi\big)$$

イ．

まず，$f_x=0$となるのは$y=\frac{1}{2}$である場合か，あるいは$\cos\big((2x+y)\pi\big)=0$となる$2x+y=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$である場合である。この条件においては$f_y$の第2項は常に0であるので，$f_y=0$となるためには$(x, y)$が$(4y+3)\sin\big((2x+y)\pi\big)=0$をみたせば十分である。指定されている範囲では$4y+3\neq 0$であるので，まず$y=\frac{1}{2}$のときに$\sin\big((2x+y)\pi\big)=0$となる$x$を探すと，$2x+\frac{1}{2}=1,2$のいずれかの場合であるから$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$と$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$である。一方，$2x+y=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$の場合には，

$(4y+3)\sin\big((2x+y)\pi\big)\neq 0$となる。以上より，求める点$(x, y)$は$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$と$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$の

2点である。

(2)

ア．

$$\iint_D y\sin(x+y)dxdy = \int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\pi-y} y\sin(x+y)\,dx\right\}dy = -\int_0^{\pi}[y\cos(x+y)]_0^{\pi-y}\,dy$$
$$= \int_0^{\pi}(y+y\cos y)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\pi} + [y\sin y]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin y\,dy = \frac{1}{2}\pi^2 + [\cos y]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\pi^2 - 2$$

イ．

$u = x-\frac{1}{\sqrt{3}}y,\ v = x+\frac{1}{\sqrt{3}}y$とすると，$x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}v$であるので

$$xy = \frac{\sqrt{3}}{4}(-u^2+v^2)$$

となる。変数変換するためのヤコビアンを計算すると

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

変数変換すると積分範囲は$|u|\leqq 1,\ |v|\leqq 2$になるので，

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{-2}^{2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{4}(-u^2+v^2)\frac{\sqrt{3}}{2}du\right\}dv = \frac{3}{8}\int_{-2}^{2}\left[-\frac{1}{3}u^3+v^2u\right]_{-1}^{1}dv = \frac{3}{8}\int_{-2}^{2}\left(-\frac{2}{3}+2v^2\right)dv$$

$$= \frac{3}{8}\left[-\frac{2}{3}v+\frac{2}{3}v^3\right]_{-2}^{2} = 3$$

[３]

(1)

ア．袋へ戻さずに1個ずつ取り出すので，1回目，2回目，3回目のそれぞれの確率は，$\frac{3}{10}$，$\frac{3}{9}$，$\frac{4}{8}$となる。したがって，赤，青，白の順で取り出す確率は，

$$\frac{3}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{20}$$

となる。

イ．10個から3個を同時に取り出す組み合わせは，全部で${}_{10}C_3$通りである。
すべて赤玉である組み合わせは，${}_3C_3$通りである。
すべて青玉である組み合わせは，${}_3C_3$通りである。
すべて白玉である組み合わせは，${}_4C_3$通りである。
したがって，すべて同じ色である確率は，

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{20}$$

となる。

ウ．10個から2個を同時に取り出す組み合わせは，全部で${}_{10}C_2$通りである。
合計した点数が奇数になる組み合わせは，(赤・青)，(青・白) である。この組み合わせとなる確率は，

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_{10}C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

である。
したがって，合計した点数が偶数になる確率は，

$$1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

となる。

(2)

ア． $y^2 \neq 0$のとき

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^x \, dx$$

$-\frac{1}{y} = e^x + C$（Cは任意定数）

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

$y^2 = 0$のとき，つまり$y = 0$は$\frac{dy}{dx} = e^x y^2$をみたす。

よって，解は，

$y = -\frac{1}{e^x+C}$（Cは任意定数）および $y = 0$

となる。

イ． $x = 0$のとき$y = 1$なので，任意定数$C = -2$となる。

したがって，特殊解は，

$$y = -\frac{1}{e^x - 2} = \frac{1}{2 - e^x}$$

となる。

$-1 \leqq x \leqq 0$において$2 - e^x$は減少関数である。よって，$-1 \leqq x \leqq 0$において$y = \frac{1}{2-e^x}$は増加関数となる。

したがって，$x = -1$のときyは最小となり，最小値は$\frac{1}{2-e^{-1}}$となる。