令和５年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　学

[1]

(1)

ア. 題意より， $S_1=\frac{8-a_1}{3}$ かつ $S_1=a_1$ であるから， $a_1=\frac{8-a_1}{3}$ すなわち $a_1=2$

イ. $S_n-S_{n-1}=a_n\ (n>1)$ を用いると， $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{8-a_n}{3}-\frac{8-a_{n-1}}{3}=\frac{-a_n+a_{n-1}}{3}$

すなわち $a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}\ (n>1)$ が得られる。この結果より，$\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列となる。よって，

$$a_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ウ. イより， $S_n=\frac{8-a_n}{3}=\frac{8}{3}\left(1-\frac{2}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)=\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ と表せる。 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8}{3}$$

エ. $S_n=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)>2.65$ であるから， $1-\frac{1}{4^n}>2.65\times\frac{3}{8}=\frac{795}{800}$

すなわち $1-\frac{795}{800}=\frac{5}{800}=\frac{1}{160}>\frac{1}{4^n}$ となる。よって， $4^n>160$ となる最小の n は， $4^3=64<160<256=4^4$ より， $n=4$

(2)

ア. $\sqrt{x^2+4x+5}-x+2=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)+4$

$$=\frac{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)+4$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}+4=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}+4$$ よって，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x+2\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}+4\right)=4$$

イ. $\cos 4x=1-2\sin^2 2x$ より， $\frac{1-\cos 4x}{4x\sin 3x}=\frac{2\sin^2 2x}{4x\sin 3x}=\frac{\sin^2 2x}{2x\sin 3x}$ であり，

$\frac{\sin^2 2x}{2x\sin 3x}=\frac{2x}{3x}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{3x}{\sin 3x}$ と書けるから，

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin z}{z}\right)}=1$ を用いると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{4x\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

[2]

(1)

$f(x)=x^2$, $g(x)=\log x+a$ として微分すると，$f'(x)=2x$, $g'(x)=\frac{1}{x}$となり，共有点Pの x 座標を t とすると，y 座標およびその点での傾きが等しいので，

$t^2=\log t+a$ ----①，　$2t=\frac{1}{t}$ ----②となる。

$g(x)$ の定義域は$x>0$であるので$t>0$ となり，②式より$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

これを①式に代入すると，

$a=t^2-\log t=\frac{1}{2}-\log\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2$ となる。

(2)

点Pのx座標が$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるので，点Pのy座標と接線Lの傾きは，それぞれ

$f(t)=t^2=\frac{1}{2}$, $f'(t)=2t=\sqrt{2}$ となる。したがって，接線Lの方程式は，

$y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ よって，$y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$ となる。

(3)

接線Lの傾きが$\sqrt{2}$ であるので，求める直線Nの傾きは$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

したがって，直線Nの方程式は，

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ よって，$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1$ となる。

(4)

接線Lと y 軸との交点Aの座標が$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

直線Nと y 軸との交点Bの座標が$(0,1)$,

点Pのx座標が$\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるので，求める図形D（△ABP）の面積S は，

$S=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$ となる。

(5)

求める直線を$y=bx$とすると，この直線が図形D（△ABP）の面積を２等分するためには，線分OAと線分OBの長さの比は1:2であるので，線分BPと交わる必要がある。この交点をEとするとそのx座標は，$y=bx=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1$より，

$x=\frac{1}{b+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b+1}$　となる。

よって，求める直線，直線N，およびy軸で囲まれた図形（三角形OBE）の面積S_2は，

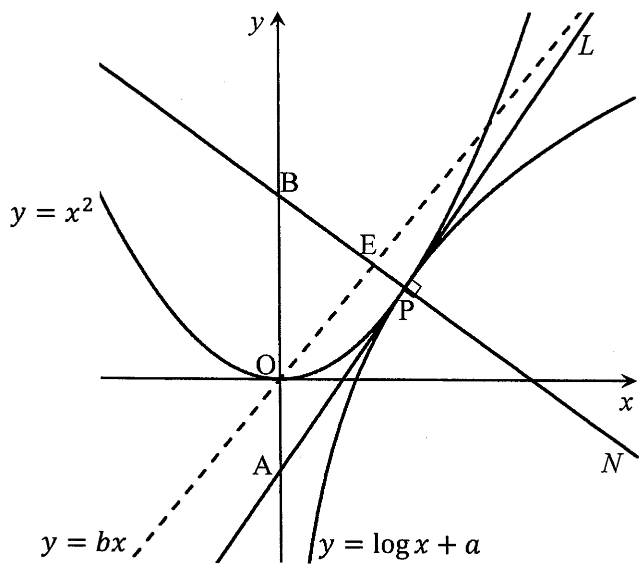
$S_2=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b+1}=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}b+1)}$となる。

この値が$\frac{1}{2}S=\frac{3\sqrt{2}}{16}$に等しくなれば良いので，

$\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}b+1)}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$となり，$b=\frac{5\sqrt{2}}{6}$が求まる。

したがって，求める直線の方程式は，$y=\frac{5\sqrt{2}}{6}x$となる。

［参考図］



［３］

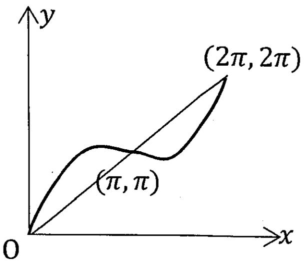
x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	0	↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↗	2π

(1)　$y = x + 2\sin x$より

$y' = 1 + 2\cos x$,　$y'' = -2\sin x$

(2)増減表より，$x=\frac{2}{3}\pi$ ，$x=\frac{4}{3}\pi$ のとき極値となる。

$x=\frac{2}{3}\pi$で極大値$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\frac{4}{3}\pi$で極小値$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$



(3)　部分積分を用いると，

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$　　ただし，Cは積分定数である。

(4)　区間 $0 \leqq x \leqq \pi$における体積をV_1とすると，

$$V_1 = \int_0^{\pi} \pi(x + 2\sin x)^2 dx - \int_0^{\pi} \pi x^2 dx = 4\pi\left\{\int_0^{\pi} x\sin x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx\right\}$$

(3)より，$V_1 = 4\pi\left\{[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx\right\} = 4\pi\left\{\pi + \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right\}$

$$= 4\pi\left\{\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = 6\pi^2$$

同様に，区間$\pi \leqq x \leqq 2\pi$における体積をV_2とすると，

$$V_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \pi x^2 dx - \int_{\pi}^{2\pi} \pi(x + 2\sin x)^2 dx = 4\pi\left\{-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos 2x)dx\right\}$$

$$= 4\pi\left\{[x\cos x - \sin x]_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos 2x)dx\right\} = 4\pi\left\{3\pi - \frac{\pi}{2}\right\} = 10\pi^2$$

よって，$V = V_1 + V_2 = 16\pi^2$

[4]

(1)

袋Aの玉は全部で6個あり，そのうち，白玉は4個である。したがって，求める確率は $\frac{2}{3}$ である。

(2)

袋Aから玉を取り出すとき，1度目に白玉を取り出す確率は(1)より，$\frac{2}{3}$ である。また，2度目に白玉を取り出すとき，袋Aには玉が全部で5個あり，そのうち白玉は3個である。したがって，2度目に白玉を取り出す確率は，$\frac{3}{5}$ である。よって，求める確率は，$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ である。

(3)

4回目までに白玉がちょうど2回出て，5回目に3度目の白玉が出る確率を求めればよい。また，1回の試行で事象Xが起こる確率をpとし，この試行をn回繰り返し行うとき，事象Xがちょうどr回起こる確率は，次式で表される。

$$ {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} $$

ここで，1回の試行で白玉を取り出す事象をXとすると，その確率pは(1)より，$\frac{2}{3}$ である。この試行を4回繰り返し行い，事象Xがちょうど2回起こる確率は，${}_4C_2(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^{4-2}=\frac{8}{27}$ である。そして，5回目に事象Xが起こる場合を考慮したものが求める確率であるので，$\frac{8}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$ となる。

(4)

袋Aから取り出した玉の色と，袋Bから取り出した玉の色が同色である確率の和を求めればよい。まず，袋A，袋B，いずれの袋からも白玉を取り出す確率は，$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ である。また，袋A，袋B，いずれの袋からも赤玉を取り出す確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$ である。したがって，求める確率はそれぞれの和であるので，$\frac{4}{9}+\frac{4}{27}=\frac{16}{27}$ となる。

(5)

求める事象は，次の3つの事象の和事象であり，これらの事象は互いに背反である。

事象[1] 袋Aの白玉の個数が4個となる場合に，袋Aから白玉を取り出す

事象[2] 袋Aの白玉の個数が3個となる場合に，袋Aから白玉を取り出す

事象[3] 袋Aの白玉の個数が5個となる場合に，袋Aから白玉を取り出す

ここで，事象[1]の確率は，(1)と(4)の解答から，$\frac{16}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{81}$ である。また，事象[2]の確率は，$\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$ である。事象[3]の確率は，$\frac{5}{27}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{162}$ である。よって，求める確率は，$\frac{32}{81}+\frac{1}{9}+\frac{25}{162}=\frac{107}{162}$ である。