令和４年度　豊橋技術科学大学第３年次入学者選抜学力検査問題解答例

# 応　用　数　学

［１］

(1)

固有ベクトルは$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$を満たすはずであるから，左辺に代入すると，

$$A\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}=-4\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

となる。これより，$\lambda=-4$とすると成り立つため，$\boldsymbol{v}$は$A$の固有ベクトルであり，固有値は$\lambda=-4$である。

(2)

平面$\alpha$は 3 次元空間の原点を通り，ベクトル$\boldsymbol{v}$に垂直であるので，$\alpha$上の任意の点 P の位置ベクトル$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$と$\boldsymbol{v}$の内積は 0 となり，

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}=x-2y+z=0$$

よって，この$\alpha$を表す式は$x-2y+z=0$である。

(3)

平面$\alpha$上の任意の点$(a,b,c)$は，上式を満たす，すなわち$a-2b+c=0$である。この点を写像すると，

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-2&2\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b-c\\2a-2b+2c\\-a+2b+c\end{pmatrix}$$

となる。これを$x-2y+z$に代入すると，

$(a+2b-c)-2(2a-2b+2c)+(-a+2b+c)$

$=-4a+8b-4c$

$=-4(a-2b+c)$

$=0$

すなわち，$x-2y+z=0$を満たす任意の点 Q を，$A$で移動した Q′ は，やはり$x-2y+z=0$を満たす，すなわち同じ平面$\alpha$上にある。

［２］（１） ア．

$$f_x(x,y)=ae^{ax}\cos by, f_y(x,y)=-be^{ax}\sin by$$

$$f_{xx}(x,y)=a^2e^{ax}\cos by, f_{xy}(x,y)=-abe^{ax}\sin by, f_{yy}(x,y)=-b^2e^{ax}\cos by$$

イ．

$$f(0,0)=1$$

$$f_x(0,0)=a, f_y(0,0)=0$$

$$f_{xx}(0,0)=a^2, f_{xy}(0,0)=0, f_{yy}(0,0)=-b^2$$

$$f \simeq f(0,0)+x\,f_x(0,0)+y\,f_y(0,0)+\frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}(0,0)+2xy\,f_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\right)$$

$$=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{2}b^2y^2$$

（２） ア．

$$\iint_D x^2y\,dxdy=\int_0^1\int_0^x x^2y\,dydx=\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx=\left[\frac{1}{10}x^5\right]_0^1=\frac{1}{10}$$

イ．

$x,y$を極座標変換すると，

$x=r\cos\theta$，　$y=r\sin\theta$

$$D'=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqq r\leqq 1,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}drd\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$$

別解

$r^2=t$とおくと

$$\frac{dt}{2}=rdr, t:0\to 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{dt}{2\sqrt{1+t}}$$

$$=\pi\left[\sqrt{1+t}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$$

[ 3 ]

(1)

ア．ある数字を引く確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ だから，4回連続して引く確率は

$\left(\frac{1}{4}\right)^4$。 数字は4種類あるから，$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times 4 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

イ．すべて異なる数字の組み合わせは，1から4までの数字の順列となるから

${}_4P_4 = 4\times3\times2\times1$。すべての組み合わせは $4^4$ だから，確率は $\frac{4\times3\times2\times1}{4^4} = \frac{3}{32}$

同じ数字のカードを2回以上取り出す確率はこの余事象だから

$1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$

ウ．最初の数字は2,4のいずれかで2通り，最後の数字は1,3のいずれかで2通り。2番目と3番目は残りの2枚の並べ方で2通りあるから，並べ方は

$2\times2\times2 = 2^3$通り。4枚の並べ方は ${}_4P_4 = 4\times3\times2\times1$ となるので，確率は

$\frac{2^3}{4\times3\times2\times1} = \frac{1}{3}$

(2)

ア．変数分離により $\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{3}{16}\int dx$ すなわち $-\frac{1}{y} = -\frac{3}{16}x + C$ （$C$は任意の定数)。 $x=0$ のとき $y=4$ だから，$C = -\frac{1}{4}$。よって微分方程式の解は

$\frac{1}{y} = \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$

イ．アの解より，$x=1,2,3$ それぞれのときの $\frac{1}{y}$ の値は $\frac{7}{16}, \frac{10}{16}, \frac{13}{16}$ だから，囲まれる領域にある点$(x, y)$のうち，$x, y$ が共に自然数となる点の数はそれぞれ2,1,1となる。よって全部で4点。