令和４年度第１年次入学者一般選抜学力検査問題　解答例

数　　　学

［１］

（1）　ア．

1辺の長さが1の正三角形の各辺を1:1に内分することから，内部にできる正三角形の1辺の長さは

$l_1 = \dfrac{1}{2}$ となる．

よって，$S_1 = \dfrac{1}{2} l_1^2 \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$

イ．

各辺を1:1に内分することから，内部にできる正三角形の1辺の長さは元の正三角形の1辺の長さの $\dfrac{1}{2}$ 倍となり，その面積は $\dfrac{1}{4}$ 倍となる。

したがって，$S_{n+1} = \dfrac{1}{4} S_n$ となる。

ウ．

数列 $\{S_n\}$ は初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である。よって，初項から第 k 項までの和を U_k とおくと，

$$U_k = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right\}$$

となる。したがって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} U_k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。

（2）　面積 S_n から面積 S_{n+1} を除いた部分の面積 T_n は合同な3つの三角形の面積の和になる。そこで，a，b を用いるとその面積は次式のようになる。

$$T_n = 3 \times \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} l_n\right)\left(\frac{b}{a+b} l_n\right)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} l_n^2$$

(3)　題意より，$T_n=\dfrac{2}{3}S_n=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}l_n^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}l_n^2$である。

(2)の結果より，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{ab}{(a+b)^2}l_n^2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}l_n^2$が成立する。

$9ab=2(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0$

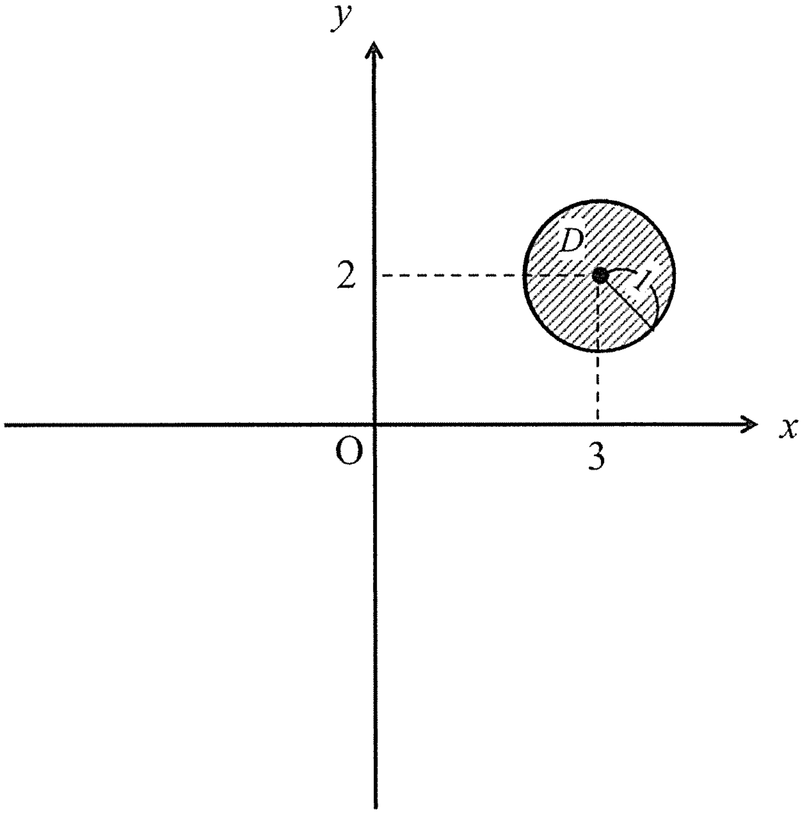
$\Leftrightarrow (2a-b)(a-2b)=0$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}b, 2b$

$a \geqq b$より，$\dfrac{a}{b}=2$である。

[2]

(1) 不等式を変形すると $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 1$ が得られる。これより，領域 D は中心が $(3,2)$ で半径が 1 の円 C およびその内部である。すなわち，下図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



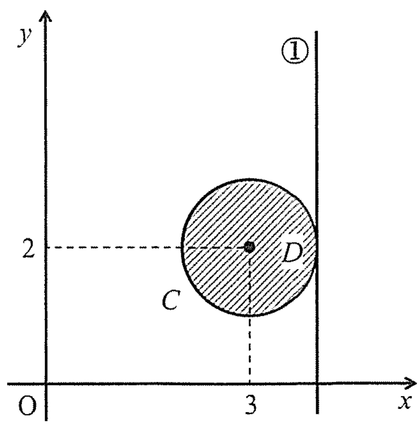
(2) $2x+1=k$ とおくと，$x=\dfrac{k-1}{2}\cdots$ ①

x 軸に垂直な直線①が領域 D と共有点を持つ場合，

x 座標 $\dfrac{k-1}{2}$ が最大となるのは，直線①が円 C に右図のように接するときである。

このとき，k も最大となることから $\dfrac{k-1}{2}=4$

よって $k=9$。



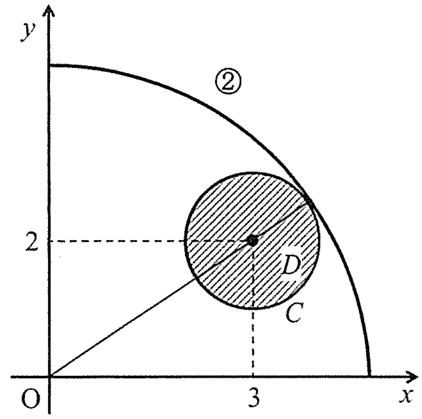
したがって，$k=2x+1$ は $(x,y)=(4,2)$ のとき，最大値 9 をとる。

(3)　$x^2+y^2=r^2 \cdots$ ②とおく。

原点を中心とする円②が領域Dと共有点を持つとき，円②の半径rが最大となるのは，円Cが円②に右図のように内接するときである。このとき

$r=\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1$

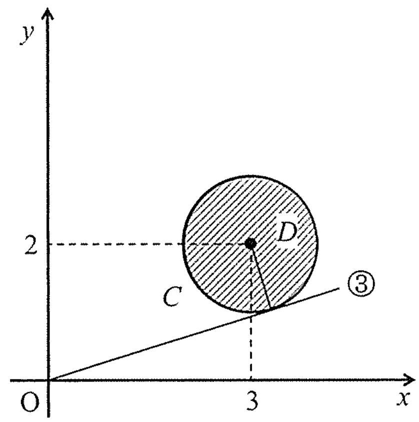
よって　$r^2=14+2\sqrt{13}$。



しがたって，x^2+y^2の最大値は$\left(\sqrt{13}+1\right)^2=14+2\sqrt{13}$となる。ただし，$x^2+y^2$の最大値をとる点$(x,y)$は，原点を中心とする半径1の円上の点$\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$を$x$軸方向に3，$y$軸方向に2だけ移動した点であるから，$(x,y)=\left(3+\dfrac{3}{\sqrt{13}},2+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$である。

(4)　$\dfrac{y}{x}=m$とおくと，　$y=mx \cdots$ ③

原点を通る直線③が領域Dと共有点を持つとき，傾きmが最小となるのは，直線③が円Cに右図のように接するときである。円Cの中心(3, 2)と直線③の距離は円Cの半径1と一致するので，



$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad すなわち \quad |3m-2|=\sqrt{m^2+1}$$

両辺を2乗して整理すると　$8m^2-12m+3=0$

これを解いて　$m=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-8\cdot 3}}{8}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

$m=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$は円Cと直線③が接する2つの直線の傾きになっていて，求めるものはmが最小となる値である。したがって，$\dfrac{y}{x}$の最小値は$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$である。ただし，$m_0=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$とするとき，$\dfrac{y}{x}$の最小値をとる点$(x,y)$は，$y=m_0x$と$y=-\dfrac{1}{m_0}(x-3)+2$の交点であるから，$(x,y)=\left(\dfrac{2m_0+3}{{m_0}^2+1},\dfrac{2m_0+3}{{m_0}^2+1}m_0\right)$である。

［３］　Oを原点とするxy平面上を動く点Pがあり，時刻tにおける点Pの座標(x,y)が

$$x=e^{-t}\sin t,\quad y=e^{-t}\cos t$$

で与えられている。

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=e^{-t}\left(-\sin t+\cos t\right)$,　$\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}\left(-\cos t-\sin t\right)$

であるから$t=0$における点Pの速度$\vec{v}$は

$$\left(e^{0}\left(-\sin 0+\cos 0\right),\quad e^{0}\left(-\cos 0-\sin 0\right)\right)=\left(1,-1\right)$$

となる。

(2)　時刻tにおける点Pの速さは時刻tにおける点Pの速度$\vec{v}$の大きさであるから，

$$\begin{aligned}\left|\vec{v}\right|&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\&=\sqrt{e^{-2t}\left(-\sin t+\cos t\right)^2+e^{-2t}\left(-\cos t-\sin t\right)^2}\\&=\sqrt{e^{-2t}\,2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}=\sqrt{2}\,e^{-t}\end{aligned}$$

となる。よってこの結果と題意より，定数t_1は，

$$\sqrt{2}\,e^{-t_1}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}$$

をみたせばよい。したがって　$t_1=\log 3$　となる。

(3)　$t=0$から$t=1$までに点Pが動く道のりLを求める。

$$L=\int_0^1\left|\vec{v}\right|dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{2}\,e^{-t}dt$$
$$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^1$$
$$=\sqrt{2}(1-e^{-1})$$

(4)　時刻$t=t_2$における点Pについて，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$とその点Pの速度のなす角$\theta$を求める。その点Pの速度を$\vec{v_1}$と表すと，内積の公式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v_1}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\vec{v_1}\right|\cos\theta,$$
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v_1}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\vec{v_1}\right|}$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v_1}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$$
$$=e^{-t_2}\sin t_2\,e^{-t_2}\left(-\sin t_2+\cos t_2\right)+e^{-t_2}\cos t_2\,e^{-t_2}\left(-\cos t_2-\sin t_2\right)$$
$$=-e^{-2t_2}\left(\sin^2 t_2+\cos^2 t_2\right)=-e^{-2t_2}\ ,$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{e^{-2t_2}\sin^2 t_2+e^{-2t_2}\cos^2 t_2}=e^{-t_2}\ ,$$

$\left|\vec{v_1}\right|=\sqrt{2}\,e^{-t_2}$　より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v_1}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\vec{v_1}\right|}=\frac{-e^{-2t_2}}{e^{-t_2}\,\sqrt{2}e^{-t_2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。したがって$\theta=\frac{3}{4}\pi$　となる。

[4]

(1)

箱Aから3枚のカードを取り出す組み合わせは${}_{10}C_3=120$通りで，4枚の素数から3枚が取り出される組み合わせは${}_{4}C_3=4$通りであるから$\frac{1}{30}$。

(2)

Sが1である事象をXとし，Tが0である事象をYとする。このとき，SのT乗の値が1である事象Z_1は和事象$X\cup Y$と同値である。よって，

$$P(X)=\frac{1}{10},\quad P(Y)=\frac{1}{10},\quad P(X\cap Y)=\frac{1}{100}$$

より，

$$P(Z_1)=P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)=\frac{19}{100}。$$

(3)

10枚のカードから3枚のカードを取り出す組み合わせは${}_{10}C_3=120$通り。

(4)

取り出したカードに0が書かれたカードが含まれる事象をXとする。取り出したカードに5が書かれたカードが含まれ，他のカードは6以上の整数が書かれたカードである事象をYとする。このとき，3桁の整数が5の倍数である事象Z_2は互いに排反な事象X, Yの和事象$X\cup Y$と同値である。よって，

$$P(X)=\frac{{}_{9}C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10},\quad P(Y)=\frac{{}_{4}C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{20}$$

より，

$$P(Z_2)=P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)=\frac{7}{20}。$$

(5)

3つの数の積が0を含む3の倍数でない事象をXとし，3つの数の積が0である事象をYとする。このとき，3つの数の積が0を除く3の倍数である事象Z_3の余事象は互いに排反な事象X，Yの和事象$X \cup Y$と同値である。ここで，Xは箱Aから3, 6, 9以外が書かれたカードを1枚取り出し，箱Bから0, 3, 6, 9以外が書かれたカードを2枚取り出す事象と言い換えることができ，Yも箱Bから取り出したカードに0が書かれたカードが含まれる事象と言い換えることができる。よって，

$$P(X) = \frac{7}{10} \cdot \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{7}{30},\quad P(Y) = \frac{9}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{5}$$

より，

$$P(Z_3) = 1 - P(X \cup Y) = 1 - P(X) - P(Y) = \frac{17}{30}。$$