令和３年度　豊橋技術科学大学第３年次入学者選抜学力検査問題

専　門　科　目　（　応　用　数　学　）

注　意　事　項

1　試験開始の合図まで，この問題冊子と解答用紙を開いてはいけません。

2　問題冊子の枚数は，表紙，草稿用紙を含めて５枚です。

3　問題冊子とは別に解答用紙が４枚あります。解答は用紙の裏面にまわってはいけません。

4　問題は３問あります。全問解答してください。

5　解答にかかる前に，すべての解答用紙の所定の箇所に受験番号を記入してください。

6　解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入してください。

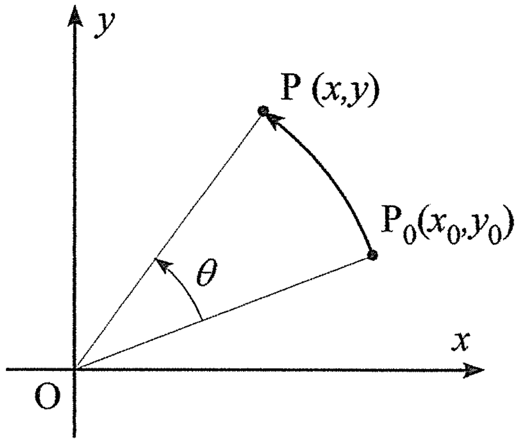
7　落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあれば，ただちに申し出てください。

8　問題冊子の余白は草稿用として使用しても構いません。

9　試験終了時刻まで退出してはいけません。

（草　稿　用　紙）

［１］　図のように，xy平面上の点$\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$を原点Oのまわりにθだけ回転した点$\mathrm{P}(x, y)$に移す座標変換は次の線形変換により表される。また，このときの変換行列を$A(\theta)$と定義する。以下の設問に答えよ。



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1)　xy平面上の点をx軸方向にa倍，y軸方向にb倍する変換行列Bをaとbを用いて表せ。

(2)　xy平面上の点を原点Oのまわりに$(-\theta)$回転し，その後x軸方向にa倍，y軸方向にb倍し，最後に原点Oのまわりにθ回転する線形変換を考える。このときの変換行列Cを$a, b, \cos\theta$および$\sin\theta$を用いて表せ。

(3)　次に示す変換行列Dの固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ1の固有ベクトルをすべて求めよ。

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4)　変換行列Cが変換行列Dに等しいとき，a, bおよびθの値を求めよ。ただし，θは$0 \le \theta \le \pi/2$の範囲にあるとする。

［２］　関数の微分積分に関連する以下の設問に答えよ。

(1) 次の偏微分と重積分を計算せよ。

ア．$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy)\quad (x>0, y>0)$

イ．$\iint_D e^{x+y}dxdy\quad \left(D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, x\le y\le 1\}\right)$

(2) 次に示す関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ。

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+10$$

ア．関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ。

イ．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(3,7)$ における接線 $y=g(x)$ と曲線 $y=f(x)$ が囲む領域のうち，領域 $\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0\}$ に含まれる部分の面積を求めよ。

［３］　$n=1,2,3$ に対して，次のように定める関数 $A_n(x)$ と定積分 B_n がある。以下の設問に答えよ。

$$A_1(x)=\frac{1}{\sin^2 x},\quad A_2(x)=\sin x,\quad A_3(x)=\sin^3 x \quad \left(\pi/3\le x\le \pi/2\right)$$

$$B_n=\int_{\pi/3}^{\pi/2} A_n(x)dx$$

(1) $\pi/3<x_0<\pi/2$ のとき，$A_1(x_0), A_2(x_0), A_3(x_0)$ を値の小さい方から順に並べよ。

(2) 定積分 B_1，B_2，B_3 をそれぞれ求めよ。

(3) 図のように，３枚のカードに１から３までの数字が１つずつ書かれている。この３枚のカードの中から無作為にカードを１枚選び，そのカードに書かれている数字を n とする。この操作を２度行うとき，少なくとも１度は $B_n>1/2$ となる数字 n が書かれているカードを選ぶ確率を求めよ。ただし，１度目の操作後に選んだカードは元に戻し，２度目でも１度目と同じ操作を行うものとする。