令和３年度　豊橋技術科学大学第３年次入学者選抜学力検査問題解答例

応　用　数　学

[1]

(1) 元の座標を $P_0(x_0, y_0)$ とし，変換後の座標を $P(x,y)$ とすると題意に沿って以下のように展開できる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 \\ by_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

したがって，変換行列 B は以下のようである。

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(2) 求める変換行列は次のように表せる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A(\theta)BA(-\theta)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta \\ -b\sin\theta & b\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos^2\theta + b\sin^2\theta & (a-b)\cos\theta\sin\theta \\ (a-b)\cos\theta\sin\theta & a\sin^2\theta + b\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって，変換行列 C は以下のようである。

$$C = \begin{pmatrix} a\cos^2\theta + b\sin^2\theta & (a-b)\cos\theta\sin\theta \\ (a-b)\cos\theta\sin\theta & a\sin^2\theta + b\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

(3) 固有値を λ とすると，以下の行列形式の方程式が成り立つ。

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} - \lambda & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

任意の座標に対して上式が成立するためには係数行列の行列式がゼロになる必要があるから，固有値 λ は以下のように求められる。

$$\begin{vmatrix} \frac{11}{4}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{11}{4}-\lambda\right)\left(\frac{9}{4}-\lambda\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \Rightarrow \lambda = 2, 3$$

固有値 $\lambda_1 = 2$ に対する固有ベクトルは，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{4}-\lambda_1 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

固有ベクトル長が１となるためには，k の値と固有ベクトルは以下のようになる。

$$(k)^2 + \left(-\sqrt{3}k\right)^2 = 4k^2 = 1 \quad \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \ or \ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}$$

固有値 $\lambda_2 = 3$ に対する固有ベクトルは，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{4}-\lambda_2 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4}-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル長が１となるためには，k の値と固有ベクトルは以下のようになる。

$$\left(\sqrt{3}k\right)^2 + (k)^2 = 4k^2 = 1 \quad \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ or \ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(4)　(2)より，

$$D = C = A(\theta)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} A(-\theta)$$

となる a, b, θ を求めればよい，$A(-\theta)$ の逆行列は $A(\theta)$ であるから，

$$DA(\theta) = A(\theta)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

となる。これを書き直すと，次の関係が成り立つ。

$$D\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad D\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ここで，ベクトル $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は互いに直交しているので，a, b はそれぞれ異なる固有値であり，その相異なる固有値に対応する固有ベクトルがそれぞれ $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ となる。また，それらの固有ベクトルが長さ1であることと $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であることに注意すると，(3)の結果より，条件に合う角度 θ と固有ベクトルは次のもののみである。

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}: \quad \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

したがって，それらの固有ベクトルの固有値はそれぞれ3と2であるから $\boxed{a = 3,\ \ b = 2}$ となる。

【別解】 点を回転する変換行列 $A(\theta)$ と $A(-\theta)$ は互いに逆行列であるので，以下のように展開できる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = A(\theta)BA(-\theta)\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(-\theta)A(\theta)BA(-\theta)A(\theta) = B = A(-\theta)DA(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 9\sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta & 9\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 11\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

以上より，$\tan\theta$ の値が次のように得られる。

$$-2\cos\theta\sin\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\sqrt{3}$$

$0 \le \theta \le \pi/2$ であるから，θ の値は次のように得られる。

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

さらに，a と b の値は次のようになる。

$$a = \frac{1}{4}\left(11\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 9\sin^2\theta\right) = \boxed{3}$$

$$b = \frac{1}{4}\left(9\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta + 11\sin^2\theta\right) = \boxed{2}$$

[2]

(1)

ア. 関数の偏微分は以下のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(xy)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log x+\log y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}+0\right)=\boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

イ. 関数の重積分は以下のようになる。

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1\left\{\int_x^1 e^{x+y}dy\right\}dx=\int_0^1\left[e^{x+y}\right]_{y=x}^{y=1}dx=\int_0^1\left(e^{x+1}-e^{x+x}\right)dx$$
$$=\left[e^{1+x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\left(e^{1+1}-\frac{1}{2}e^{2\cdot 1}\right)-\left(e^{1+0}-\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right)=\frac{1}{2}e^2-\left(e-\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}}$$

(2)

ア. 関数 $f(x)$ の導関数は以下のようである。

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+10 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=x^2-4 \quad\Rightarrow\quad f''(x)=2x$$

極値をとる条件は $f'(x)=0$ であるので

$$f'(x)=x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$
$$x=-2:\ f(x)=\frac{46}{3},\quad f''(x)=-4<0$$
$$x=+2:\ f(x)=\frac{14}{3},\quad f''(x)=+4>0$$

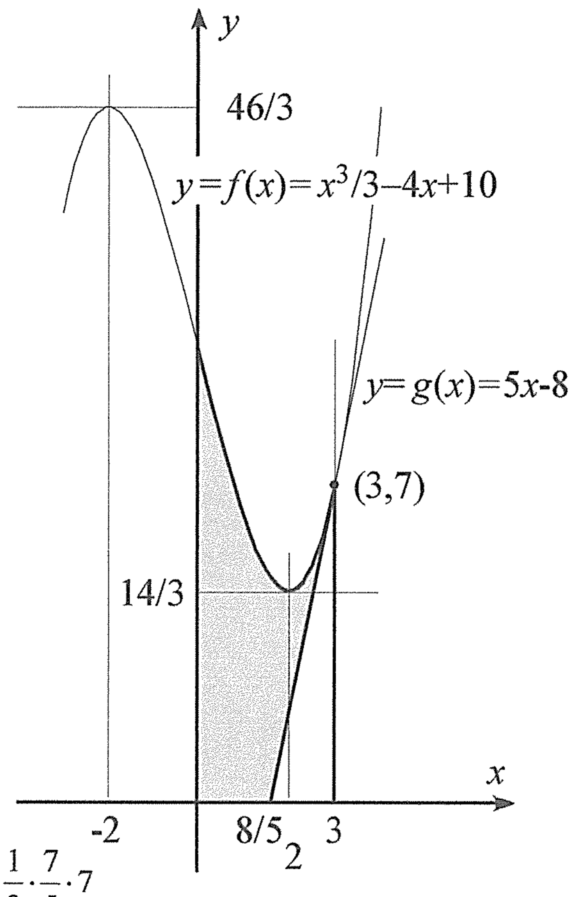
よって,

$\boxed{x=-2 \text{ のとき関数 } f(x) \text{ は極大となり，極大値は } \frac{46}{3}}$

$\boxed{x=2 \text{ のとき関数 } f(x) \text{ は極小となり，極小値は } \frac{14}{3}}$

イ．曲線 $y=f(x)$ 上の $(3,7)$ 点における接線は

$$f'(x)=x^2-4 \quad \Rightarrow \quad f'(3)=3^2-4=5$$
$$\therefore (y-7)=5\cdot(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=g(x)=5x-8$$



求める領域は右の図のようであり，面積は以下のように計算できる。

$$\int_0^3 f(x)dx-\int_{8/5}^3 g(x)dx$$
$$=\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-4x+10\right)dx-\int_{8/5}^3(5x-8)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2+10x\right]_0^3-\left[\frac{5}{2}x^2-8x\right]_{8/5}^3$$
$$=\frac{75}{4}-\frac{49}{10}=\boxed{\frac{277}{20}}$$

【別解】　上式の第２項を三角形の面積として評価すると，以下のように計算できる。

$$\int_0^3 f(x)dx-\frac{1}{2}\left(3-\frac{8}{5}\right)\cdot 7=\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-4x+10\right)dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot 7$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2+10x\right]_0^3-\frac{49}{10}=\frac{75}{4}-\frac{49}{10}=\boxed{\frac{277}{20}}$$

[3]

(1) $\left(\pi/3 < x_0 < \pi/2\right)$を満たすとき，

$0 < \sin x_0 < 1$ であるので， $\sin^3 x_0 < \sin x_0 < \dfrac{1}{\sin^2 x_0}$ であるから，

$$\therefore \boxed{A_3(x_0) < A_2(x_0) < A_1(x_0)}$$

(2)

$$B_1 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_1(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x}dx = \left[-\frac{\cos x}{\sin x}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = -\left(0 - \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\because \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}dx = -\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C$$

$$B_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_2(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$B_3 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} A_3(x)dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\sin x - \cos^2 x \sin x\right)dx$$

$$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \left(-0 + \frac{1}{3}\cdot 0\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}\right) = \boxed{\frac{11}{24}}$$

$$\because \int \sin^3 x dx = \int\left(1 - \cos^2 x\right)\cdot\left(-\cos x\right)'dx = -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) + C$$

(3) (1)および(2)より $B_3 < B_2\left(=1/2\right) < B_1$ であるから，条件 $B_n > 1/2$ を満たすのは，B_1 となる $n=1$ のみである。「少なくとも 1 度は条件を満たす確率は」は「1 度も条件を満たさない確率」の排反事象であるから，確率は以下のように計算できる。

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{9}}$$