令和２年度第１年次入学者選抜学力検査問題　解答例

数　　　学

[1]
(1)

ア. 与えられた命題を①とする。

[1] $n=1$ のとき，$7^1=7$ であり，7 を 6 で割った余りは 1 であるから $n=1$ のとき，①が成立する。

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つ，すなわち

$$7^k=6M+1$$

と仮定する。ここで M は任意の自然数である。この仮定のもとに，$n=k+1$ の場合を考えると，

$$7^{k+1}=7\times 7^k=7\times(6M+1)=42M+7=6\times(7M+1)+1$$

$7M+1$ は自然数であるから，$n=k+1$ のときにも①が成り立つことがわかる。

[1]より $n=1$ のとき，①が成り立つことが示された。また[2]より，k を自然数として $n=k$ のとき①が成り立つとすると $n=k+1$ のときも①が成り立つことが示された。ゆえに，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し 7^n を 6 で割った余りは 1 である。

イ. 二項定理によれば，

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k}$$

である。ここで a を 6，b を 1 と置けば，

$$7^n=(6+1)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 6^k\times 1^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k 6^k+{}_nC_0 6^0=\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k 6^k+1$$

と表すことができる。二項係数 ${}_nC_k$ は自然数であるから，最右辺第 1 項は，6 の倍数であり，7^n はそれよりも 1 大きい。したがって，すべての自然数 n に対し 7^n を 6 で割った余りは 1 である。

（２）

ア．$n=1$ の場合について考える。もとになる正方形の各辺を 1：1 に内分することから，内部にできる正方形の一辺の長さは，

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

と表すことができる。したがって，面積 S_1は，面積 S_0の 1/2 となる．

$n=1$ のときの正方形の辺の長さが，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることに注意すれば，$n=2$ のときにできる正方形の辺の長さは，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{5}}{3}$$

と表すことができる。したがって，面積 S_2は，

$$S_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$$

となる。

イ．同様にして $n=3$ の一辺の長さから面積 S_3を求めると

$$S_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{3+1}\right)^2+\left(\frac{1}{3+1}\right)^2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{10}{16}$$

と表すことができる。

面積 S_1，面積 S_2，面積 S_3を比べると，

$$S_1=S_0\times\frac{1}{2}$$

$$S_2=S_1\times\frac{5}{9}$$

$$S_3=S_2\times\frac{10}{16}$$

であることがわかる。すなわち，新しく作られる正方形の面積は，その前の操作によって作られた正方形の面積に係数をかけたものとなる。この係数は以下のようにして求めることができる。題意より，新しく作られる正方形は，一つ前の操作における正方形の各辺を $n:1$ に内分した点と，もとの正方形の頂点を含んだ直角三角形の斜辺を各辺とする正方形であるから，新しく作られる正方形の各辺の長さ a_n

は，一つ前操作における正方形の辺の長さ $\sqrt{S_{n-1}}$ を基準とすると，三平方の定理より，

$$a_n = \sqrt{S_{n-1}}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

と表すことができる。したがって，その面積は，

$$S_n = a_n{}^2 = \left(\sqrt{S_{n-1}}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\right)^2 = S_{n-1}\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$

となる。以上のことより，面積 S_n と S_{n-1} の関係を表す漸化式は，

$$S_n = S_{n-1}\frac{n^2+1}{(n+1)^2} \quad n=1,2,3\ldots$$ ただし，$S_0=1$ とする

と表すことができる。

[2]

(1)

ア. 点 $(0,p)$ と点Qを通る直線は, 点 $(0,p)$ を通り, 傾き -1 の直線であるから, その方程式は次のようになる。

$$y=-x+p$$

点Qは直線 $y=x-1$ と直線 $y=-x+p$ の交点であるから, この連立方程式を解いて, 点Qの座標が次のように得られる。

$$Q\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right)$$

イ. 点Qと点 $(0,p)$ との距離が2になることは次のように書ける。

$$\sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}-p\right)^2}=2$$

この式を変形すると, 次式が得られる。

$$(p+1)^2=8$$

従って, 求める p の値は以下のようになる。

$$p=-1\pm 2\sqrt{2}$$

(2)

ア. 放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ の点Rにおける接線の傾きは $\dfrac{a}{2}$ であるから, 求める法線の傾きは $-\dfrac{2}{a}$ となる $(a\neq 0)$。また, 点Rの座標は $\left(a,\dfrac{a^2}{4}\right)$ であるから, 求める法線の方程式は次のようになる。

$$y-\frac{a^2}{4}=-\frac{2}{a}(x-a)$$
$$y=-\frac{2}{a}x+\frac{a^2+8}{4}$$

イ. 問アで求めた法線に関して点 $(a,0)$ と対称な点を (s,t) とすると, 二つの点の中点の座標は $\left(\dfrac{s+a}{2},\dfrac{t}{2}\right)$ となる。これが法線上にあるから, 次の式を満たす。

$$\frac{t}{2}=-\frac{2}{a}\left(\frac{s+a}{2}\right)+\frac{a^2+8}{4} \qquad \cdots ①$$

また, 点 $(a,0)$ と点 (s,t) を通る直線の傾きは $\dfrac{a}{2}$ であるから, 次式を得る。

$$\frac{t}{s-a}=\frac{a}{2} \qquad \cdots ②$$

式②を式①に代入して整理すると次のようになる。

$$s=\frac{2a(a^2+2)}{a^2+4}$$

また, これを式②に代入することによってtが次のように得られる。

$$t=\frac{a^4}{2(a^2+4)}$$

求める直線は, 点$\left(a,\dfrac{a^2}{4}\right)$と点$(s,t)$を通る直線であるから, 次のようになる。

$$y-\frac{a^2}{4}=\frac{\dfrac{a^4}{2(a^2+4)}-\dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{2a(a^2+2)}{a^2+4}-a}(x-a)$$

$$y=\frac{a^2-4}{4a}x+1$$

ゥ. 以下の2直線,

$$y=\frac{a^2-4}{4a}x+1 \qquad \cdots ③$$

$$y=\frac{b^2-4}{4b}x+1 \qquad \cdots ④$$

について, ③− ④を計算すると次のように書ける。

$$\frac{(a-b)(ab+4)x}{4ab}=0 \qquad \cdots ⑤$$

ここで$a\neq b$であるから, $ab\neq -4$のとき, 式⑤より, $x=0$となり, 直線lと直線mの交点の座標は$(0,1)$である。

また$ab=-4$のとき, $\dfrac{a^2-4}{4a}=\dfrac{b^2-4}{4b}$, つまり, 直線$l$と直線$m$の傾きが等しくなり, 2 直線は一致するので, 交点は共有点となる。その座標は,

$$\left(t,\frac{a^2-4}{4a}t+1\right) \quad (t\text{は任意の実数})$$

である。

$$\left(t,\frac{b^2-4}{4b}t+1\right) \quad (t\text{は任意の実数})$$

でもよい。

したがって解答は

$ab\neq -4$のとき$(0,1)$

$ab=-4$のとき$\left(t,\dfrac{a^2-4}{4a}t+1\right)$ あるいは $\left(t,\dfrac{b^2-4}{4b}t+1\right)$ (tは任意の実数)

である。

［ 3 ］

（1） 点 P の座標 ： $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると $\left(a\cos^3\dfrac{\pi}{6},a\sin^3\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{3\sqrt{3}a}{8},\dfrac{a}{8}\right)$

接点の傾き $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{a\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

接線の傾きと座標を代入すると、 $y-\dfrac{a}{8}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{3\sqrt{3}a}{8}\right)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{a}{2}$

（2） 接線 l に $x=0$ を代入すると点 C の座標が得られる。点 C の座標 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$

同様に $y=0$ を代入すると点 D の座標が得られる。点 D の座標 $\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},0\right)$

（3） 曲線 AB の長さ：$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right)^2+\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)^2=9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin\theta\cos\theta d\theta=3a\left[\dfrac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3a}{2}$

線分 CD： $\sqrt{\mathrm{OD}^2+\mathrm{OC}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a$

線分 BC： $\mathrm{BO}-\mathrm{CO}=a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

線分 DA： $\mathrm{AO}-\mathrm{DO}=a-\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

全長：$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}=\dfrac{3a}{2}+\dfrac{a}{2}+a+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a=\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

（4） 曲線 AB の回転体の体積と線分 CD の回転体の体積を求め、差をとればよい。

曲線 AB の回転体の体積：

回転体断面の円の半径は曲線 AB 上の点の y 座標であるため、断面積は πy^2 である。

$V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6\theta\cdot\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta=3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^2\theta d\theta$

$=3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos^2\theta\cdot\sin\theta d\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと $-\sin\theta d\theta=dt$, θ が $0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき、t は $1\to 0$

$V=3\pi a^3\int_1^0\left(1-t^2\right)^3t^2\cdot(-dt)=3\pi a^3\int_0^1\left(t^2-3t^4+3t^6-t^8\right)dt=3\pi a^3\left[\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{5}t^5+\dfrac{3}{7}t^7-\dfrac{1}{9}t^9\right]_0^1=\dfrac{16}{105}\pi a^3$

（曲線ABの回転体の体積　（別解））ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

ウォリスの式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$ を用いる

回転体断面の円の半径は曲線AB上の点の y 座標であるため、断面積は πy^2 である。

$$V = \pi\int_0^a y^2 dx = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6\theta \cdot \left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta = 3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= 3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^7\theta - \sin^9\theta\right)d\theta = 3\pi a^3\left(\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{105}\pi a^3$$

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

線分CDの回転体の体積：$V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot \mathrm{OC}^2\cdot \mathrm{OD} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$

曲線ABの回転体の体積ー線分CDの回転体の体積：　$\dfrac{16}{105}\pi a^3 - \dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3 = \left(\dfrac{16}{105} - \dfrac{\sqrt{3}}{24}\right)\pi a^3$

[4]

(1) 2 回の操作後に，点 P が(0,0)にある A から E の組合せは，B 1 回+D 1 回または C 1 回+E 1 回となる。2 通りの組合せでそれぞれの順序の入れ替え 2 通りが可能であることから，計 4 通りである。

2 回の操作全てで $5^2=25$ 通りであることから，求める確率は $\dfrac{4}{25}$

(2) A，B，C，D，E が 1 回選ばれたとき，x 座標の値はそれぞれ，0，+1，−1，−1，+1 増減する。よって，A，B，C，D，E が選ばれた回数をそれぞれ a，b，c，d，e としたときの x 座標は $b-c-d+e$ となる。同様に，y 座標は $a+b+c-d-e$ となる。

(3) $n=a+b+c+d+e$（ただし，$0 \leqq a, b, c, d, e \leqq n$）…①，$x=b-c-d+e$…②，$y=a+b+c-d-e$…③より，それぞれ，$a+b+c+d+e=3$（ただし，$0 \leqq a, b, c, d, e \leqq 3$）…④，$b-c-d+e=1$…⑤，$a+b+c-d-e=1$…⑥である。

④，⑥式より，$d+e=1$ であり，$0 \leqq d, e \leqq 3$ から，$(d,e)=(0,1)$または$(1,0)$となる。

$(d,e)=(0,1)$の場合，④，⑤式より，それぞれ，$a+b+c=2$，$b-c=0$ となり，これと $0 \leqq a, b, c \leqq 2$ より，$(a,b,c)=(2,0,0)$または$(0,1,1)$であり，$(d,e)=(0,1)$の場合の(a,b,c)が存在する。
同様に，$(d,e)=(1,0)$の場合，$a+b+c=2$，$b-c=2$ となり，$(a,b,c)=(0,2,0)$であり，$(d,e)=(1,0)$の場合の(a,b,c)が存在する。

よって，$(d,e)=(0,1)$または$(1,0)$となる。

(4) (3)より，$(a,b,c,d,e)=(2,0,0,0,1)$，$(0,1,1,0,1)$，または$(0,2,0,1,0)$となる。
$(a,b,c,d,e)=(2,0,0,0,1)$，$(0,2,0,1,0)$は順序の入れ替えがそれぞれ 3 通り，$(a,b,c,d,e)=(0,1,1,0,1)$は順序の入れ替えが 6 通りあることから，計 12 通りである。

3 回の操作全てで $5^3=125$ 通りであることから，求める確率は $\dfrac{12}{125}$

(5) $a+b+c+d+e=m$，$a+b+c-d-e=0$，$b-c-d+e=1-m$ である。

最初の2式より，$2a+2b+2c=m$ となり，m が奇数のとき，$a+b+c=\frac{m}{2}$ を満たす解は存在しない。

よって求める確率は 0