「高校生向け数学オリンピック」

難問を解いて、豊橋技術科学大学オープンキャンパスに持ってきてくれた人に、解答とステキなグッズをお渡しします。
場所は当日パンフレットを参照してください。

第2回です。

[1] 算数のパズルです。

1 から **4** までの4つの数字を1回ずつ使って数字の **0** から **16** までを作って下さい。
以下のルールに従って下さい。

- 1, 2, 3, 4 をこの順番で必ず1回ずつ使う
- 各数字の間には必ず四則演算子(×÷＋－)のどれかが1つ入る
- 数字を複数並べて複数桁の数字としてはいけない
- 括弧は何回使ってもよい
- "－"を「負の数字」を表現するために使ってもよい
- 分数形は使えない（割り算は使える）
- 指数や根号(ルート)は使えない

例："23"を作る場合： 23= -1+2X3X4, "28"を作る場合： 28= (1+2X3)X4

[2]級数の問題です。

ここでは数列の和を「計算」するのではなく、
これまで「公式」として習ったものを自分で導いてみましょう。

[2-1] 整数 1 から n までの和を求めよ。

[2-2] 整数 1^2 から n^2 までの和を求めよ。

[2-3] 整数 1^3 から n^3 までの和を求めよ。

[2-4] 整数 1^4 から n^4 までの和を求めよ。

[3]派生問題です。

[2]の答えを利用して以下の定積分を証明して下さい。
ただし「積分公式」を使ってはいけません。
（これがわかるとニュートンの"プリンキピア"が理解できます）

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

[4] パズルです。

以下の数列において空欄を埋めて下さい。(理由も説明して下さい)

O, T, T, F, F, S, S, E, □, T, E, T, ...

[5] パズルです(派生問題)。

以下の数列において空欄を埋めて下さい。（[4]に類似しています）

[5-1] U, D, T, Q, C, S, S, H, □, D, O, D, ...

[5-2] E, Z, D, V, F, S, S, A, □, Z, E, Z, ...

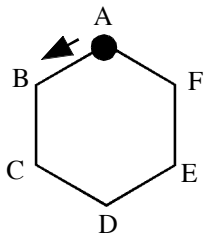
[5-3] 松, 梅, 桜, 藤, 菖蒲, 牡丹, 萩, 芒, □, 紅葉, 柳, 桐

2010年夏

[6] 方程式の解の公式を求める問題です。

三次方程式の一般解を求めよ。（教科書には載っていない問題です）

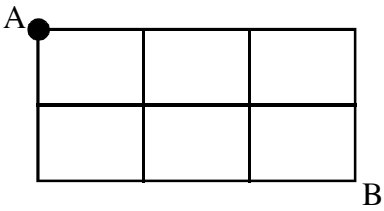
[7] 確率の問題です。



右図のような正六角形があり、その頂点に順番にA～Fまでの記号が付けられている。
いま、点Aにある黒丸がサイコロを振って出た目の数だけ反時計回りに移動するものとする。サイコロの目の出方が均一であるとき、サイコロを3回振ったとき、黒丸がちょうど点Aに来る確率を求めよ。

（例：サイコロの目が順に 1, 2, 4 と出た場合、黒丸はAからBへ(1つ移動)、BからDへ(2つ移動)、DからBへ(4つ移動)と移動することになる）

[8] 確率の問題です。



右図のような格子と点A,Bがあります。
点Aにある黒丸が点Aを出発点として下記のサイコロの目の出方によって移動するとき以下の問いに答えて下さい。

- 1 の目が出たら左へ1つ移動
- 2 の目が出たら上へ1つ移動
- 3, 4 の目が出たら右へ1つ移動
- 5, 6 の目が出たら下へ1つ移動
- 黒丸は格子上の線分のみを移動する
- 移動できない場合は移動しない（その移動は無視する）

問[8-1] 点Aから点Bへ最短距離で至る移動は何通りありますか？
問[8-2] 問[8-1]の移動方法で点Aから点Bへ移動する確率を求めて下さい。
問[8-3] 点Aを出発して点Bへ到達するためにはサイコロを何回振る必要がありますか？
その期待値を求めて下さい。（整数部のみで結構です）

以上８問です。

数学オリンピックは今回が２回目です。
昨年度（第1回）の問題も載せておきます。解答例はオープンキャンパスで配付します。

「高校生向け数学オリンピック」

2009年のオープンキャンパス用に公開した問題です。
今年も解答例の公開を行っています。

2009年度の問題。

(1) 下記のフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ において $a_1=1, a_2=1$ であるとき、一般項 a_n を求めよ。

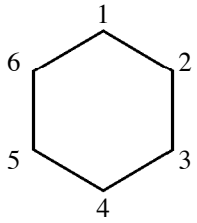
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$\{a_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

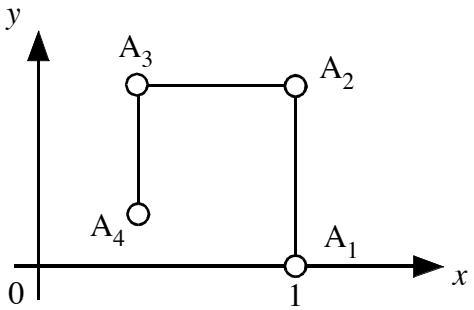
(2) 上記の(1) を参考にして以下の数列の一般項を求めよ。

$$\{a_n\} : 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, ...$$

(3) 一片の長さが 1 である正六角形の頂点に順番に 1 から 6 までの数字を付ける。
いま目の出方が均一であるサイコロが 1 つある。このサイコロを 3 回振って出た目の数字の点を頂点とする三角形を考えるとき、この三角形の面積の期待値を求めよ。
ただし、サイコロによって選ばれた点が重なっていても構わないとする。



(4) xy 平面上に A_1 から A_n までの n 個の点がある。
A_1 は $(1, 0)$ とし、A_2 は $(1, a)$ とする。
以下、線分 $A_{k+1}A_k$ は線分 A_kA_{k-1} の a 倍の長さとなるように、反時計回り方向に各点を順次配置する。
（右図を参照）
この時、$n\to\infty$ とした際の A_∞ の座標を求めよ。
ただし $0<a<1$ とする。



(5) 平方根のついた複素数は、平方根を外して $a + ib$ (a, b は実数)と書き直すことができる。
例：
$$\sqrt{-5+12i} = 2+3i$$

この性質を利用して次の複素数を $a + ib$ の形へ書き直せ。

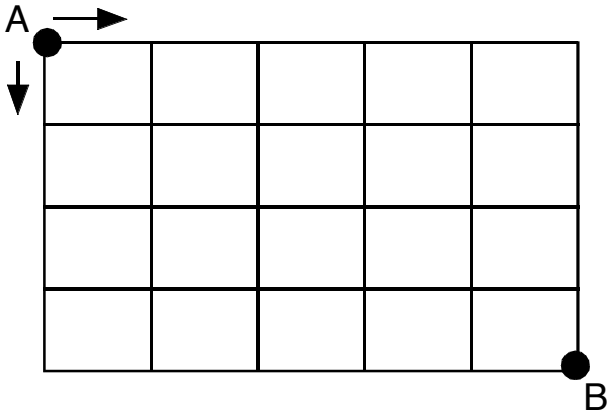
(5-1) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}}$

(5-2) $\sqrt{i}$

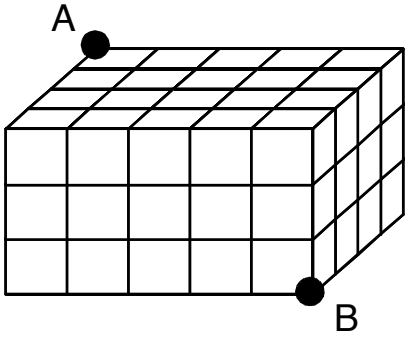
2009年度の問題。

2009年度の問題。

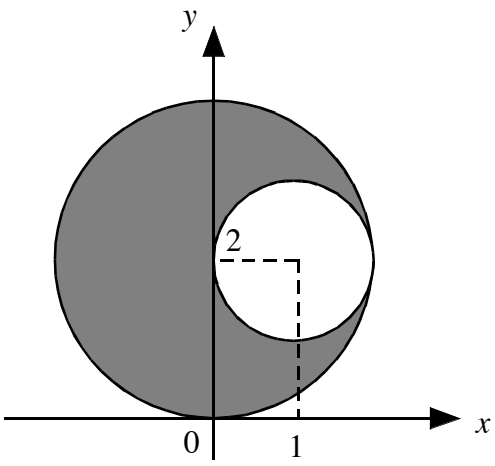
(6) 右図のような格子が平面上にある。
格子の左上の点を A 、右下の点を B とするとき
点 A から点 B まで格子上の線分に沿って最短距離
で移動する行き方は何通りあるか？



(7) 右図のような60個の立方体を隙間無く積み上げて
作った直方体がある。
直方体上の点 A から同じく直方体上の点 B まで最短
距離で移動する行き方は何通りあるか？
ただし、移動できるのは各立方体上の辺のみであり、
また直方体内部に隠れた辺上の移動も可能であるとす
る。



(8) xy 平面上に右図のように半径1の円と半径2の円がある。
半径1の円は点 (1, 2) を中心とし、半径2の円は点 (0, 2) を中
心としている。
このとき、2つの円で囲まれる領域を x 軸を中心として回
転させてできる図形の体積 V_x と、y 軸を中心として回転さ
せた場合にできる図形の体積 V_y とをそれぞれ求めよ。



2009年度の問題。